Author: Ιωάννης Παπανδρεόπουλος

Title: «Αόριστο Ολοκλήρωμα»: Μια ... αοριστολογικώς οριζόμενη έννοια

Creator: HDML

«Αόριστο Ολοκλήρωμα»: Μια…αοριστολογικώς οριζόμενη έννοια.

Παπανδρεόπουλος Χ. Ιωάννης

Εισαγωγή

Η έννοια **«αόριστο ολοκλήρωμα συνάρτησης f σε διάστημα Δ»** ορίζεται στο σχολικό εγχειρίδιο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ' τάξης Ενιαίου Λυκείου σαν **«το σύνολο όλων των παραγουσών μιας συνάρτησης f σ' ένα διάστημα Δ»** αφού προηγουμένως έχει αποδειχθεί το

Θεώρημα:«Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c \in \Re$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, $c \in \Re$.»([**6**],σελ. 304).Αμέσως δε μετά τον Πίνακα Αορίστων Ολοκληρωμάτων ([**6**],σελ. 305) αναφέρονται τα εξής: «Συνέπεια του ορισμού του αορίστου ολοκληρώματος και των κανόνων παραγώγισης είναι οι εξής ιδιότητες:
  Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσα σ' ένα διάστημα Δ , τότε
- $\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$, $\lambda \in \Re^*$
- $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$ ».

► Στην τελευταία πρόταση εμφανίζεται αιφνιδίως καινοτομία συμβολισμού στα Μαθηματικά του Λυκείου. Πότε ορίσθηκαν οι πράξεις: «πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού επί σύνολο» ή «πρόσθεση δύο συνόλων»;; (Σχετική επισήμανση περιλαμβάνεται στο «Σχόλιο» της σελ. 184 του [**4**].)

► Στην δε σελ. 311(του[**6**]) και στη λύση της εφαρμογής 1(iv) της σελ. 310, ο αναγνώστης παρατηρεί, ότι από την ισότητα Ι=$e^x\,\eta\mu(2x)-2e^x\,\sigma\upsilon\nu(2x)$-4Ι, όπου Ι=$\int e^x \eta\mu(2x)dx$, προκύπτει η ισότης: 5Ι=$e^x\,\eta\mu(2x)-2e^x\,\sigma\upsilon\nu(2x)+$!(Βεβαίως η απάντηση ενυπάρχει στους δυο τελευταίους στίχους της απόδειξης του τύπου της *«ολοκλήρωσης κατά παράγοντες»*: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$ (**[6]**,σελ.310), αλλά η συγκεκριμένη μορφή του προηγούμενου τύπου είναι αμφιλεγόμενη, αφού σε κλασικά συγγράμματα Ανάλυσης ο εν λόγω τύπος παρουσιάζεται στην εξής μορφή: $\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \ + c$ (**[1]**, σελ. 180 και **[3]**, σελ.318)).

► Αλλά και στη σελ. 358(του **[6]**) και στις «Ερωτήσεις κατανόησης» επί του Ολοκληρωτικού Λογισμού καλείται ο μαθητής να εντοπίσει το λάθος σε μια σειρά πράξεων η οποία καταλήγει στην ισότητα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$ και εν συνεχεία στο συμπέρασμα: «οπότε 0=1!»(Ερώτηση ΙΙΙ.3.)

Επειδή, κατά την γνώμη μου, τα παραπάνω σημεία του Σχολικού Εγχειριδίου αιφνιδιάζουν τον μαθητή της Γ΄ Λυκείου, αλλά και δημιουργείται στον νού του – **ιδίως ως προς τον συμβολισμό του αορίστου ολοκληρώματος σε σχέση με τον ορισμό του** – ένα νεφέλωμα, εισηγούμαι τα εξής όσον αφορά στην εισαγωγή της έννοιας του αορίστου ολοκληρώματος και την διατύπωση των ιδιοτήτων της:

Ορισμός - ιδιότητες

Θεώρημα:Αν F είναι μια παράγουσα της συνάρτησης f σε διάστημα Δ, τότε το σύνολο όλων των παραγουσών της f στο Δ είναι το Σ= $\{G/G = F + c, c \in \Re : \textit{οποιαδήποτε} - \textit{σταθερά}\}$ (καθώς λέμε:*«η σταθερά c διατρέχει το σύνολο* $\Re$ »).

Μετά την απόδειξη του Θεωρήματος (και η οποία προφανώς ταυτίζεται με την υπάρχουσα στο Σχολ. Εγχειρ.) δίνεται ο

ΟΡΙΣΜΟΣ:Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και F μια παράγουσα αυτής στο Δ. ***Αόριστο Ολοκλήρωμα της*** f ***στο*** Δ, το οποίο συμβολίζεται $\int f(x)dx$ (συμβολισμός **Leibniz**([1], σελ. 173)), ορίζεται να είναι *μια (μαθηματική) έκφραση, η οποία δίδει την γενική μορφή* ***κάθε*** *παραγούσης της* f ([**3**], σελ.38).

Βάσει του Θεωρήματος και του Ορισμού προκύπτει ότι:

$\int f(x)dx = F(x) + c$ (1) όπου c:σταθερά, η οποία διατρέχει το $\Re$ (*«αυθαίρετη σταθερά»* ή *«σταθερά ολοκλήρωσης»*(**[3]**, σελ.315) και η οποία θα πρέπει καταλλήλως να επιλεγεί για να πάρουμε μια ορισμένη παράγουσα της f (**[3]**, σελ.314 ή **[1]**,σελ.173)).

Στο ίδιο πνεύμα, νομίζω, κινείται και ο καθηγητής **Στ. Νεγρεπόντης** στο **[2]**(σελ.67-68)., ο οποίος σημειωτέον υπογραμμίζει(**[2]**,σελ. 68) ότι «αν F *το αόριστο ολοκλήρωμα* της(συνεχούς) συνάρτησης f, τότε ισχύει: $\int f$ = F+λ *για κάθε* $\lambda \in \Re$ »(Σημ.:Σύμφωνα με προηγηθέντα ορισμό στο σύγγραμα *«το αόριστο ολοκλήρωμα»* μιας συνεχούς συνάρτησης f στο [α, β] είναι η συνάρτηση $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in$ [α. β]).Ο δε καθηγητής **Γ.Ν. Παντελίδης** παρατηρεί στο **[4]**(σελ.184): «Σημειώστε ότι ***η «αόριστο ολοκλήρωμα» είναι πλειονότιμη συνάρτηση, ενώ η «παραγώγιση» είναι μονότιμη»***.(Στο σημείο αυτό δράττομαι της ευκαιρίας να σημειώσω ότι: Νομίζω δεν θα ήταν άσκοπο να αναφερθεί στο Σχολ. Εγχειρ. ότι ***μία ουσιώδης διαφορά μεταξύ Διαφορικού και Ολοκληρωτικού Λογισμού*** είναι, ότι ***η παράγωγος μιας «στοιχειώδους» συνάρτησης είναι πάντοτε μια «στοιχειώδης» συνάρτηση, ενώ το αόριστο ολοκλήρωμα μιας «στοιχειώδους» συνάρτησης μπορεί να μην είναι μια «στοιχειώδης» συνάρτηση ,πχ.*** $\frac{\eta\mu x}{x}, \frac{1}{\ln x}, e^{-x^2}$,κ.λπ (**[3]**,σελ.314, αλλά και στο **[5]**, σελ.263)).

Πέραν των προφανών σχέσεων:

$\int f'(x)dx = f(x) + c$, $c \in \Re$, (για κάθε παραγωγίσημη συνάρτηση f σε διάστημα Δ), (2) και $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ (3)

παρατηρεί κανείς τα εξής:

Παρατήρηση 1.

Το σύμβολο $\int f(x)dx$ *στη σχέση (1) δεν εξαρτάται από την επιλογή της παραγούσης F της* f *στο Δ.(Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος)*

Παρατήρηση 2

Απ' όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι ο συμβολισμός $\int f(x)dx$ ***μας δίδει, καθώς στο 2° μέλος της (1) το c διατρέχει το*** $\Re$, ***το σύνολο όλων των παραγουσών της f στο Δ.***

Παρατήρηση 3.

Προφανώς ισχύει(στο Δ) η ισοδυναμία:

$$\int f(x)dx = F(x)+c \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \quad (4).$$

Σημείωση: Οι σχέσεις (2) και (3) αντιστοιχούν ως προς το περιεχόμενό τους στα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα της Ανάλυσης(στο 2° και 1° αντιστοίχως), δηλ. μπορεί να πεί κανείς ότι: «ο συμβολισμός Leibniz μας επιτρέπει να συνοψίσουμε τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα της Ανάλυσης σε δύο μικρούς συμβολικούς τύπους.... Η ολοκλήρωση μιας συνάρτησης ακολουθούμενη από την παραγώγιση της παράγουσάς της μας ξαναφέρνει στην αρχική συνάρτηση-που είναι βέβαια το περιεχόμενο του πρώτου Θεμελιώδους Θεωρήματος της Ανάλυσης»(**[1]**, σελ.175). Επίσης μπορούμε να πούμε ότι η ολοκλήρωση της παραγώγου μιας συνάρτησης μας οδηγεί στην ίδια την συνάρτηση αυξημένη κατά μια σταθερά-"μια άλλη έκφραση του περιεχομένου του δευτέρου Θεμελιώδους Θεωρήματος της Ανάλυσης"(**[1]**, σελ.175).

Η βασική ιδιότητα(«***γραμμική***», βάσει του**[3]**, σελ.315) του αορίστου ολοκληρώματος εκφράζεται από την εξής:

Πρόταση 1. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσες σ' ένα διάστημα Δ, τότε: $\int(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int f(x)dx + \mu\int g(x)dx + c$ (5) για κάθε λ, μ∈ ℜ (όπου c: σταθερά).

Απόδειξη:

$$\left(\lambda\int f(x)dx + \mu\int g(x)dx\right)' = \lambda\left(\int f(x)dx\right)' + \mu\left(\int g(x)dx\right)' = \lambda f(x)+\mu g(x). \blacksquare$$

Πόρισμα:

(i) $\int \lambda f(x)dx = \lambda\int f(x)dx$.

(ii) $\int (f(x)\pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Επίσης ισχύει η εξής:

Πρόταση 2. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν παράγουσες σ' ένα διάστημα Δ, τότε:

$\int f(x)dx = \int g(x)dx \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ **για κάθε** $x \in \Delta$. (6)

Απόδειξη: ΑΣΚΗΣΗ.■

*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. **APOSTOL T.M.**: *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός,Τομ.Ι,* Ατλαντίς, Αθήνα(Τίτλος πρωτοτύπου: CALCULUS, New York-London, 1962).
2. **Νεγρεπόντης Σ. Γιωτόπουλος Σ. Γιαννακούλιας Ε.**: *Απειροστικός Λογισμός, Τομ.ΙΙα,* Εκδόσεις Αίθρα, Αθήνα 1995.
3. **NIKOLSKY S.M.**: *A Course of Mathematical Analysis*, Vol.1, MIR PUBLISHERS, Moscow, 1977.
4. **ΠΑΝΤΕΛΙΔΗ Γ.Ν;** *Βιβλίο του Διδάσκοντος για το Μάθημα ΑΝΑΛΥΣΗ της Γ' Λυκείου,* ΖΗΤΗ, Θες/νίκη,1998.
5. **Σχολικό Εγχειρίδιο: Μαθηματικά 1ης Δέσμης,** ΟΕΔΒ, 1994.
6. **Σχολικό Εγχειρίδιο:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' τάξης Ε.Λ.,**ΟΕΔΒ, 2003.