Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Αριθμητικά τετράπλευρα και τετράεδρα.

Abstract: Τετράπλευρα που έχουν ακέραιες πλευρές, διαγώνιες και εμβαδά.
Τριγωνικές πυραμίδες που έχουν ακέραιες ακμές και όγκο επίσης ακέραιο.

Creator: HDML

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ ΚΑΙ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

Τοῦ **Παρ. Μαρουσάκη**

1. Στὸ τεῦχος τοῦ Μαρτίου—Ἀπριλίου 1975 τοῦ ΕΥΚΛΕΙΔΗ ἐξετάσαμε τὰ ἀριθμητικὰ τρίγωνα καὶ καταρτίσαμε πίνακα *Πυθαγόρειων* καὶ *Ἡρώνειων* τριάδων.

2. Τώρα μᾶς ἐνδιαφέρει νὰ ἐξετάσουμε τὰ ἀριθμητικὰ τετράπλευρα δηλ. τὰ τετράπλευρα ποὺ ἔχουν ἀκέραιες πλευρές, διαγώνιες καὶ ἐμβαδά. Ἀκόμη θ' ἀσχοληθοῦμε μὲ τὰ *Ἀριθμητικὰ τετράεδρα* δηλ. τὶς τριγωνικὲς πυραμίδες ποὺ ἔχουν ἀκέραιες ἀκμὲς καὶ ὄγκον ἐπίσης ἀκέραιον (βλ. L. Dickson: Theory of vol II p. 221).

Σημ. Γιὰ νὰ διαβαστοῦν μ' εὐκολία καὶ νὰ κατανοηθοῦν ὅσα γράφονται παρακάτω χρειάζεται νὰ γνωρίζουμε τὰ περὶ ἀριθμητικῶν τριγώνων.

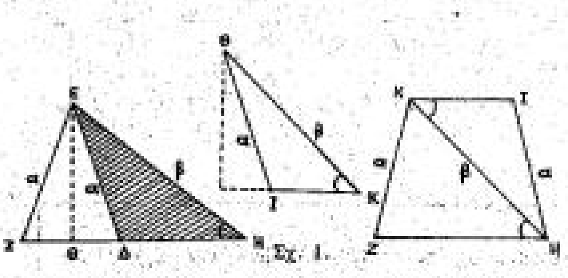
Τὰ ἀριθμητικὰ τετράπλευρα

3. Ἀπὸ κάθε ἀριθμητικὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο μποροῦμε πολὺ εὔκολα νὰ βροῦμε ἕνα ρόμβο μὲ ἀκέραιες πλευρές, διαγώνιες καὶ ἐμβαδόν. Διότι ὁ κάθε ρόμβος εἶναι τὸ τετραπλάσιο ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. Π. χ. ἀπὸ τὴν Π. Τ. (3, 4, 5) βρίσκομε τὸ ρόμβο μὲ πλευρὰ 5 καὶ διαγώνιες 6,8 ὁ ὁποῖος εἶναι καὶ ἕνα ἀριθμητικὸ παραλληλόγραμμο. Ἀπὸ τὴν ἴδια Π. Τ. μποροῦμε νὰ ἔχουμε κι' ἕνα ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο μὲ πλευρὲς 3,4 τὶς διαγώνιες ἴσες μὲ 5 καὶ μὲ ἐμβαδὸν 12.

Ὥστε ἀπὸ κάθε Π. Τ. μποροῦμε νὰ ἔχουμε ἕναν ἀριθμητικὸ ρόμβο καὶ ἕνα ἀριθμητικὸ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο.

4. Ἕνα ἀριθμητικὸ τραπέζιο καὶ μάλιστα ἰσοσκελὲς μπορεῖ νὰ προκύψῃ ἀπὸ τοὺς παραμετρικοὺς τύπους ποὺ μᾶς δίνουν Ἡρώνειες τριάδες:

$$\alpha = k\lambda(\mu^2+\nu^2) \qquad \text{καὶ} \quad E = k\cdot\lambda\cdot\mu\nu\cdot\gamma$$
$$\beta = \mu\nu(k^2+\lambda^2)$$
$$\gamma = k\lambda(\mu^2-\nu^2) \pm \mu\nu(k^2-\lambda^2) = (\mu k \pm \nu\lambda)(\mu\lambda \pm \nu k)$$



Σχ. 1.

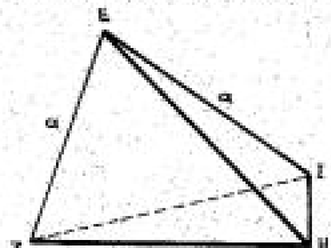
Στοὺς τύπους αὐτοὺς σὲ κάθε τετράδα τῶν παραμέτρων (k, λ, μ, ν) ἀντιστοιχοῦν δυὸ ἀριθμητικὰ τρίγωνα ποὺ διαφέρουν μόνο στὴν πλευρὰ γ.

Ἡ πρώτη τριάδα ἀντιστοιχεῖ στὸ τρίγωνο ΕΖΗ (ὅπου $\gamma = Z\Theta + \Theta H$) καὶ ἡ *δεύτερη* στὸ τρίγωνο ΘΙΚ (τώρα εἶναι $\gamma = IK = \Delta H = \Theta H - \Delta\Theta$) (σχ. 1)

Ὥστε τὸ τετράπλευρο ΚΖΗΙ ποὺ προκύπτει ἂν παραθέσουμε τὸ τρίγωνο ΘΚΙ στὸ ΖΕΗ μὲ τρόπο ποὺ νὰ ἐφαρμόσουν οἱ ἴσες πλευρὲς των ΚΘ καὶ ΕΗ, θὰ εἶναι ἕνα τραπέζιο διότι γωνία Κ = γωνία Η στὰ δυὸ τρίγωνα. Τὸ σχῆμα τοῦτο εἶναι καὶ ἰσοσκελὲς τραπέζιο ἐπειδὴ $IH = KZ = \alpha$ καὶ ἔχει:

$$ZH = k\lambda(\mu^2-\nu^2) + \mu\nu(k^2-\lambda^2)$$
$$KI = k\lambda(\mu^2-\nu^2) - \mu\nu(k^2-\lambda^2)$$
$$KH = \beta = \mu\nu(k^2+\lambda^2) = ZI \qquad (1)$$
καὶ
$$E = 2k^2\lambda^2\mu\nu(\mu^2-\nu^2)$$

5. Τὰ τρίγωνα ΕΖΗ καὶ ΘΙΚ ποὺ εἶναι ἀριθμητικὰ (σχ. 1) καὶ διαφέρουν μόνο κατὰ τὴν πλευρά τους γ, μποροῦμε νὰ τὰ ἐφαρμόσουμε στὸ ἴδιο ἐπίπεδο καὶ μὲ ἄλλο τρόπο, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν ἕνα ἄλλο ἀριθμητικὸ τετράπλευρο (σχ. 2)



Σχ. 2.

Πραγματικὰ ἂν ἐφαρμόσῃ ἡ ΘΚ πάνω στὴν ΕΗ θὰ προκύψῃ τὸ σχῆμα ΖΕΙΗ ποὺ δὲν εἶναι τραπέζιο καὶ ἔχει $ZE = ZH$ καὶ $\widehat{Z} + \widehat{I} = 180^\circ$ δηλ. εἶναι ἕνα ἐγγράψιμο τετράπλευρο ποὺ ἔχει ὅλες τὶς πλευρές του ἀκέραιες:

$$EZ = EI = k\lambda(\mu^2+\nu^2)$$
$$ZH = k\lambda(\mu^2-\nu^2) + \mu\nu(k^2-\lambda^2)$$
$$HI = k\lambda(\mu^2-\nu^2) - \mu\nu(k^2-\lambda^2)$$
$$EH = \mu\nu(k^2+\lambda^2)$$

διότι εἶναι πλευρὲς ἀριθμητικῶν τριγώνων. Ἡ διαγώνιος $EH = \beta = \mu\nu(k^2+\lambda^2)$ = ἀκέραιος καὶ ἡ ἄλλη διαγώνιος ΖΙ εἶναι ρητὸς ἀριθμός. Διότι ἐφαρμόζοντας τὸ θεώρημα Πτολεμαίου θὰ ἔχουμε:

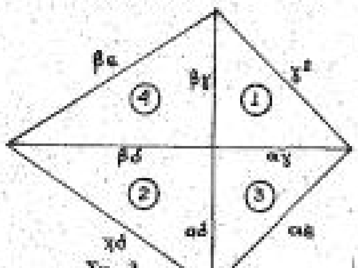
$$ZI \cdot EH = EI \cdot ZH + EZ \cdot IH \quad \text{δηλ.}$$
$$ZI = \frac{\alpha \cdot 2k\lambda(\mu^2-\nu^2)}{\mu\nu(k^2+\lambda^2)} =$$
$$= \frac{2k^2\lambda^2(\mu^2+\nu^2)(\mu^2-\nu^2)}{\mu\nu(k^2+\lambda^2)} = \text{ρητὸς} \qquad (2)$$

Τὸ ἐμβαδὸν τοῦ νέου τετραπλεύρου στὸ σχ. 2 εἶναι τὸ ἴδιο μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΖΗΙΗ

6. Μὲ τὴ βοήθεια δυὸ Π. Τ. μποροῦμε ἀκόμη νὰ κατασκευάσουμε ἕνα ἀριθμητικὸ τετράπλευρο μὲ καθέτους διαγωνίους (χωρὶς νὰ εἶναι ρόμβος), ἐὰν ἡ ὑποτείνουσα τῆς μιᾶς τριάδος εἶναι κάθετος πλευρὰ στὴν ἄλλη Π. Τ. Δηλ. ἀπὸ τὶς Π. Τ.:

$\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$ καὶ $\gamma^2+\delta^2=\varepsilon^2$ ἢ (α,β,γ) καὶ $(\gamma,\delta,\varepsilon)$ μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε τίς:

$(\alpha\gamma,\beta\gamma,\gamma^2)$, $(\alpha\delta,\beta\delta,\gamma\delta)$, $(\alpha\gamma,\alpha\delta,\alpha\varepsilon)$ καὶ $(\beta\gamma,\beta\delta,\beta\varepsilon)$ ποὺ εἶναι βέβαια Π. Τ. Οἱ ὑποτείνουσες σ' αὐτὲς τὶς τριάδες δηλ. οἱ $(\alpha\varepsilon)$, $(\beta\varepsilon)$, (γ^2) καὶ $(\gamma\delta)$ εἶναι



Σχ. 3.

πλευρὲς τοῦ ἀριθμητικοῦ τετραπλεύρου ποὺ πραγματοποιεῖται ὅταν οἱ 4 ὀρθὲς γωνίες τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων τῶν τεσσάρων Πυθαγόρειων τριάδων ποὺ θεωροῦμε γίνουν διαδοχικές, ὅπως φαίνεται στὸ σχ. 3. Τὸ τετράπλευρο αὐτὸ ἔχει προφανῶς διαγώνιες ἀκέραιες καὶ ἐμβαδὸν ἐπίσης ἀκέραιο καὶ ἴσο μέ:

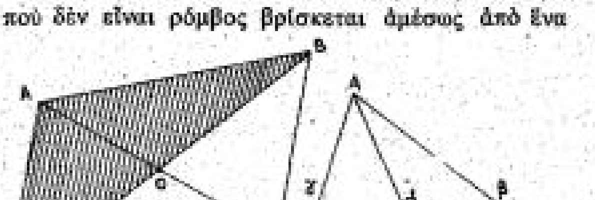
$$\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4=\frac{\alpha\beta\gamma}{2}+\frac{\alpha\beta\delta}{2}+\frac{\alpha\gamma\delta}{2}+\frac{\beta\gamma\delta}{2}=$$

$$=\frac{\alpha\beta}{2}(\gamma+\delta)+\frac{\gamma\delta}{2}(\alpha+\beta)=E \text{ ἀκέραιος}$$

Πραγματικὰ σὲ κάθε Π.Τ. ἡ μιὰ κάθετος πλευρὰ (τουλάχιστο) εἶναι ἀριθμὸς ἄρτιος καὶ γι' αὐτὸ $E=$ ἀκέραιος.

Τὸ ἀριθμητικὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο

7. Τὸ ἀριθμητικὸ πλάγιο παραλληλόγραμμο ποὺ δὲν εἶναι ρόμβος βρίσκεται ἀμέσως ἀπὸ ἕνα



Σχ. 4.

ἀριθμητικὸ τρίγωνο ποὺ ἔχει μιὰ διάμεσό του ἀριθμὸ ἀκέραιο. Τότε δυὸ τέτοια τρίγωνα ἀποτελοῦν ἕνα ἀριθμητικὸ παραλληλόγραμμο. Π. χ. ἂν στὸ ἀριθμητικὸ τρίγωνο ΑΒΓ εἶναι καὶ ἡ διάμεσός του ΑΟ ἀκέραιος τότε καὶ τὸ παραλληλόγραμμο ΑΓΔΒ εἶναι ἕνα ἀριθμητικὸ παραλληλόγραμμο μὲ πλευρὲς ἀκέραιες, διαγώνιες ἀκέραιες καθὼς καὶ ἐμβαδό.

8. Τὸ πρόβλημα τοῦ πλαγίου ἀριθμητικοῦ παραλληλογράμμου λύνεται μὲ δύσκολο τρόπο καὶ μὲ πολύπλοκους ὑπολογισμούς (βλ. εἰσαγωγὴ εἰς τὴν διοφαντικὴ 'Ανάλυση ἀνωτέρου βαθμοῦ τῶν Γ. ΞΗΡΟΥΔΑΚΗ καὶ Κ. ΦΑΣΟΥΛΑΚΗ—1947). Ἐδῶ ἁπλῶς θὰ ἀναφέρουμε τύπους πλευρῶν τριγώνων μὲ μιὰ παράμετρο, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀριθμητικὰ καὶ ἔχουν καὶ μιὰ διάμεσο ἀκέραιο. Ἕνα τέτοιο τρίγωνο ΑΒΓ μὲ πλευρὲς α, β, γ καὶ διάμεσο στὴν πλευρὰ α τὴ μ_α ἔχει τύπους:

$$\alpha=k[(k+2)^2+(2k+1)^2]$$
$$\beta=(1-k^2)(1+k+k^2)$$
$$\gamma=k^2(k+2)^2+(2k+1)^2$$
$$\mu_\alpha=\frac{1}{2}(k+2)(2k+1)(1+k^2) \qquad (3)$$

καὶ $\quad E=k(k+2)(2k+1)(1-k^2)(1+k+k^2)$

ὅπου k θετικὸς ρητὸς <1

Διὰ $k=\frac{1}{2}$ θὰ ἔχουμε τὸ τρίγωνο ΑΒΓ μὲ τὰ στοιχεῖα:

$$\alpha=\frac{41}{8} \qquad \alpha=82$$
$$\beta=\frac{21}{16} \quad ἢ \quad \beta=21 \qquad \text{καὶ } E=840$$
$$\gamma=\frac{89}{16} \qquad \gamma=89$$
$$\mu_\alpha=\frac{25}{8} \qquad \mu_\alpha=50$$

ὁμοίως γιὰ $k=\frac{1}{3}$ θὰ ἔχομε (σὲ ἀκεραίους) τὸ ἀριθμητικὸ τρίγωνο ποὺ εἶναι τὸ μισὸ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ πλαγίου παραλληλογράμμου:

$$\alpha=222$$
$$\beta=104 \qquad \text{καὶ } E=10920$$
$$\gamma=274$$
$$\mu_\alpha=175$$

Τὸ τρίγωνο μὲ ἀκέραιες πλευρὲς καὶ μιὰ διάμεσο ἀκέραιο

9. Στὸ τρίγωνο ΑΒΓ τοῦ σχ. 3 μὲ διάμετρο τὴν ΑΔ γιὰ νὰ ἔχῃ ἀκέραιες πλευρὲς καὶ τὴν ΑΔ ἀκεραία, πρέπει νὰ ἐπαληθεύεται ἡ σχέση (θεώρ. διαμέσου):

$$AB^2 + A\Gamma^2 = 2(A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2) \quad \text{ἤ}$$

$$\gamma^2 + \beta^2 = 2(\delta^2 + \alpha_1^2) = (\delta+\alpha_1)^2 + (\delta-\alpha_1)^2 = x^2 + y^2 \quad (4)$$

Ἂν πάρωμε τὰ τμήματα $A\Delta = \delta$ καὶ $\Delta\Gamma = \alpha_1$ τυχόντας ἀκεραίους θὰ εἶναι καὶ x, y ἀκέραιοι ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι τὸ ἄθροισμα καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀκεραίων δ καὶ α_1. Αὐτοὶ οἱ ἀκέραιοι x, y θέλομε νὰ παίζουν τὸ ρόλο τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου β, γ δηλ. νὰ εἶναι $x + y > 2\delta$ καὶ $x + y > 2\alpha_1$. Γι' αὐτὸ ἀκριβῶς οἱ ἀκέραιοι $(\delta+\alpha_1)$ καὶ $(\delta-\alpha_1)$ δὲν εἶναι δεκτοί. Μποροῦμε ὅμως νὰ προσδιορίσουμε τὰ x, y ὥστε νὰ εἶναι δεκτὰ ὡς ἑξῆς:

Θεωροῦμε μιὰ τυχοῦσα Π. Τ. (k, λ, ρ) ὥστε $k^2 + \lambda^2 = \rho^2$. Τότε θὰ εἶναι:

$$\rho^2(x^2 + y^2) = (k^2 + \lambda^2)(x^2 + y^2) =$$

$$= (kx \pm \lambda y)^2 + (ky \mp \lambda x)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{(kx \pm \lambda y)}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{(ky \mp \lambda x)}{\rho}\right)^2$$

(τύπος **Fibonacci**) (5)

Ἔτσι τὸ ἄθροισμα δυὸ ἀκεραίων τετραγώνων $(x^2 + y^2)$ ἐκφράζεται σὰν ἄθροισμα δυὸ ἄλλων ρητῶν τετραγώνων μὲ ὅσους τρόπους θέλουμε: σὲ καθεμιὰ Π. Τ. ἀντιστοιχοῦν δυὸ τρόποι ἔκφρασης τῶν ζητουμένων x, y μὲ τὸν περιορισμὸ (γιὰ νὰ εἶναι δεκτὰ σὰν πλευρὲς τριγώνου):

$$\frac{kx + \lambda y}{\rho} + \frac{ky - \lambda x}{2} > 2\delta \text{ καὶ } 2\alpha_1$$

10. Ἐφαρμογή. Ἂν πάρωμε $A\Delta = \delta = 7$ καὶ $\Gamma\Delta = 6$ ζητοῦμε τὸ ὀξυγώνιο τρίγωνο στὴν κορυφὴ A (ἐπειδὴ $A\Delta > \Gamma\Delta$ σχ. 3) νὰ ἔχει ρητὲς πλευρὲς $AB = \gamma$ καὶ $A\Gamma = \beta$ ποὺ νὰ περιέχει τὴ διάμεσο $A\Delta = 7$ καὶ ἡ τρίτη πλευρὰ $B\Gamma$ νὰ εἶναι ἴση μὲ $2 \cdot \Delta\Gamma = 12$. Θὰ ἔχουμε:

$$\gamma^2 + \beta^2 = 2(7^2 + 6^2) = 170 = (7+6)^2 + (7-6)^2 = 13^2 + 1^2$$

Προφανῶς οἱ ἀριθμοὶ 13 καὶ 1 δὲ μποροῦν νὰ παίζουν τὸ ρόλο πλευρῶν β, γ διότι:

$$13 + 1 = 14 = 2 \cdot 7 = 2\delta$$

ποὺ εἶναι ἄτοπο.

Ἂν πάρωμε τώρα τὴν Π. Τ. (3, 4, 5) = (k, λ, ρ) θὰ εἶναι (τύπος 5)

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3 \cdot 13 + 4 \cdot 1}{5}\right)^2 + \left(\frac{3 \cdot 1 - 4 \cdot 13}{5}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{43}{5}\right)^2 + \left(\frac{49}{5}\right)^2 = 170$$

Δηλαδὴ οἱ πλευρές:

$$\beta = \frac{43}{5} = 8\,\frac{3}{5} \quad \text{καὶ} \quad \gamma = \frac{49}{5} = 9\,\frac{4}{5}$$

ποὺ ἔχουν ἄθροισμα τετραγώνων τὸ 170 καὶ ἄθροισμα $18\,\frac{2}{4} > 14$, μποροῦν νὰ εἶναι πλευρὲς τοῦ ζητούμενου τριγώνου. Ἔχουμε ἀκόμη τὴν ἰσότητα:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 13}{5}\right)^2 +$$

$$+ \left(\frac{3 \cdot 13 - 4 \cdot 1}{5}\right)^2 = 11^2 + 7^2 = 170$$

Ἔτσι βρίσκουμε ἀκόμη ἕνα τρίγωνο μὲ πλευρὲς β, γ τὰ 7, 11.

Ὥστε τὰ τρίγωνα μὲ πλευρὲς (7, 11, 12) καί:

$$\left(8\,\frac{3}{5},\ 9\,\frac{4}{5},\ 12\right)$$

ἢ τὸ ὅμοιό του (43, 49, 60) ἔχουν ἀκέραιες πλευρὲς καὶ ἀκεραία διάμεσο στὴ μεγαλύτερή της πλευρά: τὸ πρῶτο ἔχει τὴ διάμεσο 7 καὶ τὸ δεύτερο τὴν 35.

Παρατήρηση. Μποροῦμε πιὸ εὔκολα νὰ βροῦμε τοὺς ἀριθμοὺς x, y λύνοντας τὴν ἐξίσωση:

$$(13 - \omega)^2 + (1 + 2\omega)^2 = 170$$

ποὺ ἔχει μιὰ ρίζα της τὴν $\omega = \frac{22}{5}$. Τότε:

$$x^2 + y^2 = \left(13 - \frac{22}{5}\right)^2 + \left(1 + \frac{44}{5}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{43}{5}\right)^2 + \left(\frac{49}{5}\right)^2 = 170$$

δηλ. $\beta = \left(\frac{43}{5}\right)$ καὶ $\gamma = \left(\frac{49}{5}\right)$

Σ' αὐτὴ τὴν ἐξίσωση τοῦ ω, μεταβάλλοντας τοὺς συντελεστὲς τοῦ ω βρίσκουμε ὅσα θέλουμε ζεύγη τιμῶν ποὺ ἀνταποκρίνονται στὸ ζητούμενο. Π.χ. ἡ ἐξίσωση $(13 - \omega)^2 + (1 + 3\omega)^2 = 170$ μᾶς δίνει:

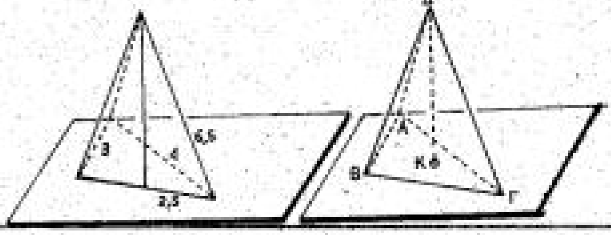
$$\omega = 2 \quad \text{καὶ} \quad x = 11,\ y = 7 \quad \text{κ.τ.λ.}$$

Πρέπει ἀκόμη νὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὸ τρίγωνο ποὺ μᾶς δίνει αὐτὴ ἡ μέθοδος ἔχει βέβαια ἀκέραιες πλευρὲς καὶ διάμεσο ἀλλὰ ἐν γένει δὲν εἶναι ἀριθμητικὸ διότι δὲν ἔχει ἀκέραιο ἐμβαδό. Ἄρα δὲ μᾶς δίνει ἕνα ἀντίστοιχο ἀριθμητικὸ παραλληλόγραμμο.

Ἀριθμητικὰ τετράεδρα

11. Ὅπως ἀναφέραμε καὶ στὴν § 2, τὸ ἀριθμητικὸ τετράεδρο πρέπει νὰ ἔχει ἀκμὲς ἀκέραιες καὶ ὄγκο ἐπίσης ἀκέραιο. Μποροῦμε νὰ δώσουμε ἀμέσως μιὰ μερικὴ λύση στὸ πρόβλημα ἂν πάρωμε βάση τοῦ τετραέδρου τὸ τυχὸν ἀριθμητικὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο καὶ ὕψος του τὴν κάθετο στὴ βάση του καὶ στὸ μέσον τῆς ὑποτείνουσας, ὥστε τὸ ὕψος αὐτὸ καὶ τὸ μισὸ τῆς ὑποτείνουσας νὰ εἶναι οἱ κάθετες πλευρὲς σὲ μιὰ Π. Τ.

Παράδειγμα. Ἂν πάρωμε γιὰ βάση τοῦ τετραέδρου τὸ τρίγωνο τῆς Π. Τ. (3, 4, 5) τὸ τετράεδρο ποὺ προκύπτει ἔχει πλευρὲς βάσεως (3, 4, 5) καὶ ἴσες παράπλευρες ἀκμὲς (καθ: μιὰ ἴση μὲ $6\frac{1}{2}$ σχ. 4).



Σχ. 4.

Δηλ. μποροῦμε νὰ ἔχομε ἀριθμητικὸ τετράεδρο μὲ ἀκέραιες πλευρὲς βάσεως 6, 8, 10 καὶ ἀκμὲς παράπλευρες ἴσες μὲ 13. Ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι 188.

12. Μὲ γενικότερο τρόπο μποροῦμε ν' ἀντιμετωπίσουμε τὸ πρόβλημα ἂν παρατηρήσωμε ὅτι στὸ τυχὸν ἀριθμητικὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἡ ἀκτίνα τοῦ περιγραμμένου κύκλου δίνεται ἀπὸ τὸν τύπο:

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E} = \text{ρητός}.$$

Ἂν τώρα στὸ περίκεντρο τοῦ τριγώνου ὑψώσωμε κάθετο στὸ ἐπίπεδό του ὥστε ν' ἀνήκει στὴν ἴδια Π. Τ. μὲ τὴν ἀκτίνα R τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ ἔχουμε τὴ βάση ΑΒΓ καὶ τὴν κορυφὴ Δ ἑνὸς ἀριθμητικοῦ τετραέδρου

Παράδειγμα. Στὸ ἀριθμητικὸ τρίγωνο (13, 14, 15) ἔχομε $R = \frac{5\cdot 13}{8}$. Ἂν πάρωμε ὕψος $K\Delta = \frac{19\cdot 13}{8}$ θὰ ἔχουμε παράπλευρες ἀκμὲς ἴσες μὲ $\frac{13\cdot 13}{8}$ καὶ ὄγκο ἴσο μὲ $\frac{84\cdot 13}{2} = 504$. Στὸ τετράεδρο αὐτὸ ἂν πολλαπλασιάσωμε ὅλες τὶς ἀκμὲς ἐπὶ 8 θὰ ἔχουμε ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ ἀριθμητικοῦ τετραέδρου σὲ ἀκέραιους.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Μὲ τὴ μέθοδο ποὺ ἐργαστήκαμε προηγουμένως μποροῦμε νὰ ἔχομε καὶ ἀριθμητικὲς πυραμίδες μὲ βάση ἐγγράψιμο ἀριθμητικὸ τετράπλευρο, ἂν πάρωμε γιὰ ὕψος του τὴν κάθετο ποὺ ἄγεται στὸ κέντρο τοῦ περιγραμμένου κύκλου (διότι ἡ ἀκτίνα τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἶναι ἕνας ρητὸς καὶ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ περιγραμμένου κύκλου σ' ἕνα ἀπὸ τὰ δυὸ τρίγωνα ποὺ ἀποτελοῦν τὸ τετράπλευρο § 5)

Ἀκόμη πρέπει νὰ σημειώσουμε ὅτι τὰ ἀριθμητικὰ τετράεδρα σπουδάζονται μὲ γενικότερο τρόπο ἂν ξεκινήσωμε ἀπὸ μιὰ ἀριθμητικὴ τρίεδρο γωνία δηλ. τὴν τρίεδρο ποὺ ἔχει ἑδρικὲς καὶ διεδρες γωνίες ἀριθμητικὲς (βλ. L. Dickson, History of numbers Vol II ch I).

Δεκέμβρης 1975

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟ Δ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΝΙΚΟΜΑΧΟΥ

(«ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ» Ὀκτωβρίου - Νοεμβρίου 1975)

Ἰωάννης Παπαδάτος
Ἐπίτ. Γεν. Ἐπιθεωρητὴς Μαθηματικῶν

1) Ὁ συγγραφέας μετὰ τὴν ἐκφώνηση τοῦ προβλήματος γράφει: «Ἀπὸ τὰ χρόνια ἐκείνου (τοῦ Λέοντος) μέχρι τώρα, ὅλοι μὴ γνωρίζοντας τὸ σκοπὸ του καὶ στὴν προσπάθειά τους νὰ εἶναι κάθε μερίδα 20, τὸ μισὸ δηλαδὴ τοῦ 40, ἐνόμιζαν ὅτι ἐπιχειροῦν ἀκατόρθωτα, ἀφοῦ δὲν εὕρισκαν λύση» καὶ συνεχίζει: «Ἀλλ' ἡμεῖς, μὴ ἀγνοοῦντες τὸν ἐκείνου σκοπόν, ὅτι οὐκ ἀδύνατα προέθετο ζητεῖν, ἀλλὰ δυνατὰ μέν, πλὴν οὐ τοῖς πᾶσι πρόχειρα, μόνοις δὲ τοῖς τῶν ἀριθμητικῶν μαθημάτων ἐμπείροις, διείλομεν αὐτὰ δίχα οὕτως...» Ἀπὸ τὴν τελευταία φράση διαφαίνεται ὅτι κάποιος νόμος πιθανὸν νὰ κρύβεται στὸν τρόπο διαμερισμοῦ τῶν ἀριθμῶν. Μολονότι πέτυχα καὶ ἄλλο παράδειγμα:

1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 7

μὲ ἄθροισμα 32 καὶ τὸ χώρισα ἔτσι:

$$5\times(1+3+5) = 3\times(3+5+7) \Rightarrow 5\times 9 = 3\times 15 = 45,$$

δὲν κατόρθωσα νὰ βρῶ νόμο. Ἂς τὸ ἐπιχειρήσει κάποιος ἄλλος πιὸ ἱκανός.

2) Νομίζω ὅτι κατὰ λάθος γράφεται τὸ —is σημαίνει ἴσον. Ὅταν ὁ συγγραφέας γράφει:

$$\varepsilon^{-is},\ \alpha,\ \alpha,\ \gamma,\ -\gamma^{-is},\ \alpha,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \theta \quad \text{τὸ} \quad \varepsilon^{-is}$$

σημαίνει πεντάκις καὶ τὸ γ^{-is} σημαίνει τρὶς γιὰ νὰ ὑποδηλώσει τὸν πολλαπλασιασμό:

$$5\times(1+1+3+7) = 3\times(1+5+5+9)$$

Σ' αὐτὸ συμφώνησε καὶ ὁ κ. Σταμάτης ὅταν παληότερα τὸ συζητήσαμε. Ἔτσι μένει τὸ εὐθύγραμμο τμῆμα — νὰ σημαίνει ἴσον καὶ νομίζω, ὅτι γιὰ πρώτη φορὰ ἐμφανίζεται σύμβολο τῆς ἰσότητος. Τὸ σημερινὸ = ἐμφανίστηκε μὲ συστηματικὸ τρόπο στὸ βιβλίο τοῦ Ἄγγλου Μαθηματικοῦ Robert Recorde (1510—1558) ὁ ὁποῖος λέει ὅτι τίποτε δὲν μπορεῖ καλύτερα ν' ἀποδώσει τὴν ἰδέα τῆς ἰσότητος, ὅσο δύο μικρὲς παράλληλες εὐθεῖες. Τὸ περίεργο εἶναι ὅτι ἀπὸ τὸν Viéte (1540—1603) μέχρι τὸν Leibniz (1646—1716) χρησιμοποιήθηκε γιὰ σύμβολο τῆς ἰσότητος, παράλληλα μὲ τὸ = καὶ τὸ σημερινὸ σύμβολο τοῦ ἀπείρου ∞, ποὺ εἶναι παραφθορὰ τῆς ἀρχικῆς διφθόγγου ae ἢ æ τῆς λέξεως aequalis ποὺ σημαίνει ἴσον. Τὸ ∞ καθιερώθηκε μὲ τὴ σημερινή του σημασία ἀπὸ τὸν J. Wallis (1616—1703).