Author: Κ. Γαβρίλης

Title: Η συμμετρία

Creator: HDML

Η Συμμετρία

Κ. Γαβρίλης

Η ομορφιά είναι συνδεδεμένη με την συμμετρία

(H. Weyl Γερμανός μαθηματικός 1886 – 1955)

Η εικόνα που έχουμε μπροστά μας απεικονίζει ένα θαύμα της φύσης. Ένα τέλειο δημιούργημα.

Τί το κάνει άραγε να φαίνεται τόσο τέλειο; Τόσο όμορφο;

Τα ωραία χρώματα;

Ή αυτή η αρμονία που υπάρχει; Αυτή η αίσθηση της ισορροπίας που δημιουργείται σε όποιον το παρατηρεί;

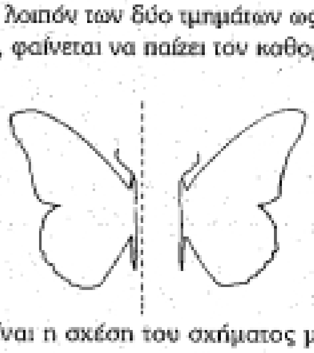
Η πεταλούδα, όταν την παρατηρούμε, νιώθουμε ότι αποτελείται από δύο ακριβώς ίδια κομμάτια, που στέκουν από την μία και από την άλλη μεριά, μιας νοητής γραμμής, που διέρχεται κατά μήκος του σώματός της.

Τα δύο αυτά κομμάτια, είναι τόσο ίδια, ώστε αν φανταστεί κάποιος το ένα από αυτά να στρέφεται κατά 180 γύρω από αυτήν την νοητή γραμμή (αν διπλωθεί δηλαδή γύρω από αυτήν την ευθεία), θα πέσει ακριβώς πάνω στο άλλο.

Ποιά είναι όμως η αιτία αυτής της ταύτισης;

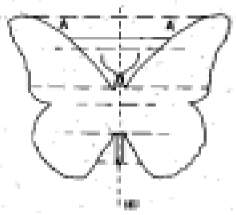
Ας χαράξουμε αυτή τη νοητή γραμμή και ας κόψουμε το σχήμα κατά μήκος της. Ας απομακρύνουμε εν συνεχεία τα δυο τμήματα σε τυχαίες θέσεις. Τώρα αν στρέψουμε γύρω από αυτή τη γραμμή, κατά 180 το ένα τμήμα, θα διαπιστώσουμε ότι πλέον δεν ταυτίζεται με το άλλο. Τώρα η ισορροπία καταστράφηκε.

Η θέση λοιπόν των δύο τμημάτων ως προς αυτή την ευθεία, φαίνεται να παίζει τον καθοριστικότερο ρόλο.



Ποιά είναι η σχέση του σχήματος με αυτή την νοητή ευθεία;

Ας ξαναγυρίσουμε στο αρχικό μας σχήμα. Ας χαράξουμε αυτήν την νοητή γραμμή (ε) (Σχ. 2).



Ας πάρουμε ένα σημείο Α στο ένα μέρος του σχήματος και ας χαράξουμε την κάθετη στην (ε) από το Α. Αν την προεκτείνουμε κατά ίσο μήκος, θα βρούμε σημείο Α΄ στο άλλο μέρος του σχήματος. Τώρα η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΑ΄.

Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία και για άλλα σημεία, θα βεβαιωθούμε ότι η (ε) είναι μεσοκάθετη σε άπειρα ευθύγραμμα τμήματα με άκρα στα δύο μέρη του σχήματος.

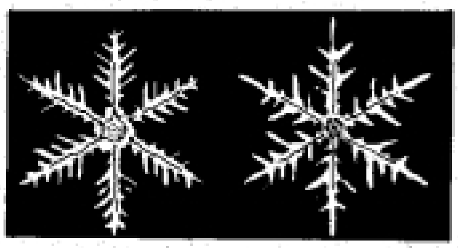
Αυτή λοιπόν είναι η αιτία της ταύτισης των δύο τμημάτων κατά την δίπλωση, η αιτίας της ισορροπίας.

Η ύπαρξη της μεσοκαθέτου.

Η ευθεία (ε) είναι η μοναδική μεσοκάθετη του σχήματος. Είναι ο μοναδικός άξονας που αν στρέψουμε το ένα τμήμα κατά 180 γύρω από αυτόν, θα συμπέσει με το άλλο.

Αυτή η ευθεία λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος.

Η επόμενη εικόνα παρουσιάζει εξαγωνικές νιφάδες χιονιού, σε διάφορες μορφές.



Ας απομονώσουμε μία από αυτές.

Η τέλεια αρμονία, η τέλεια ισορροπία είναι φανερή.

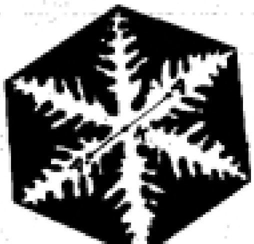
Εδώ έχουμε πολλούς άξονες συμμετρίας που μπορούμε να βρούμε εύκολα με διαδοχικές διπλώσεις.

Όμως αυτή η αίσθηση της αρμονίας, της ισορροπίας που νιώθουμε έχει σχέση με την ύπαρξη ενός σημείου. Κάθε φορά που παρατηρούμε αυτό το σχήμα, το μάτι μας πέφτει πρώτα απ' όλα στο κέντρο του σχήματος Κ. Αυτό δεσπόζει στο σχήμα.

Αν στρέψουμε το μισό σχήμα γύρω από αυτό το σημείο κατά 180, θα ταυτιστεί με το άλλο μισό.

Ας πάρουμε ένα σημείο Α στο σχήμα μας και ας το ενώσουμε με το Κ. Ας το προεκτείνουμε εν συνεχεία κατά ίσο τμήμα. Τότε θα βρούμε το σημείο Α΄ που είναι στο άλλο μισό του σχήματος.

Το Κ δηλαδή είναι το μέσο του ΑΑ΄. Τα δύο σημεία Α και Α ισορροπούν όπως δύο ίσα βάρη στη ζυγαριά.



Αν επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία και για άλλα σημεία του σχήματος θα διαπιστώσουμε ότι το Κ είναι το μέσον άπειρων ευθ. τμημάτων με άκρα πάνω στο σχήμα. Δηλαδή το Κ είναι πράγματι το κέντρο του σχήματος.

Είναι το **κέντρο συμμετρίας** του σχήματος.

Τα σχήματα της γεωμετρίας και η αξονική συμμετρία

Είδαμε πιο πάνω, μερικά απείρου κάλλους δημιουργήματα της φύσης και προσπαθήσαμε να ερμηνεύσουμε τις βαθύτερες αιτίες αυτής της τελειότητας που μας παρουσιάζεται. Είδαμε να κρύβεται πίσω από τα όμορφα χρώματα η συμμετρία. Ο άξονας συμμετρίας και το κέντρο συμμετρίας. Τα δύο αυτά αόρατα στοιχεία των σχημάτων.

Φυσικά υπάρχουν και άλλες αιτίες. Ας τις παραβλέψουμε [illegible] και ας ασχοληθούνε λίγο ακόμα με τις δύο συμμετρίες.

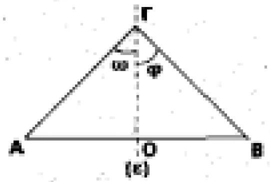
Γνωρίζουμε ότι μερικά σχήματα στη Γεωμετρία παρουσιάζουν μια χαρακτηριστική τελειότητα. Αυτή θα διερευνήσουμε.

1) Η μεσοκάθετη ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι άξονας συμμετρίας

Ας πάρουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ας χαράξουμε την μεσοκάθετή του (ε). Με στροφή γύρω από την (ε) κατά 180 (με δίπλωση) διαπιστώνουμε ότι το Α ταυτίζεται με το Β. Λέμε τότε ότι το Α είναι συμμετρικό του Β. Επίσης το τμήμα ΟΑ ταυτίζεται με το ΟΒ. Δηλαδή η (ε) είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.

Ας πάρουμε ένα σημείο Γ πάνω στην (ε) και ας το ενώσουμε με τα σημεία Β και Α. Με στροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας (ε) κατά 180, διαπιστώνουμε τα εξής:

(i) ΑΓ = ΒΓ (ii) $\hat{A} = \hat{B}$ (iii) $\hat{\omega} = \hat{\varphi}$ (ταυτίζονται με δίπλωση).



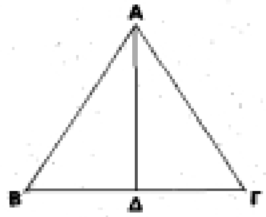
Ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. Στα ίδια συμπεράσματα θα καταλήξουμε αν πάρουμε το σημείο Γ σε άλλη θέση πάνω στην (ε).

Έτσι η χάραξη της μεσοκάθετης σ' ένα ευθύγραμμο τμήμα δημιουργεί τις εξής ιδιότητες:

1) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ισαπέχει από τα άκρα του ευθυ. τμήματος.
2) Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου δημιουργεί με τα άκρα του τμήματος ισοσκελές τρίγωνο στο οποίο η μεσοκάθετος είναι ύψος και διχοτόμος.
3) Οι γωνίες Α και Β της βάσης του ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.
4) Τα τρίγωνα ΟΑΓ και ΟΒΓ είναι ίσα.

2) Σχήματα με άξονα συμμετρίας και οι ιδιότητες τους

1) Το ισοσκελές τρίγωνο.



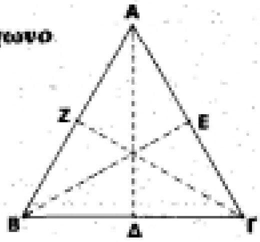
Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ.

Ας χαράξουμε το ύψος ΑΔ.

Με στροφή κατά180 γύρω από την ΑΔ, διαπιστώνουμε ότι η ΑΔ είναι άξονας συμμετρίας. Άρα.

1) Το ύψος που αντιστοιχεί στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου είναι και διάμεσος και διχοτόμος.
2) Οι γωνίες της βάσης Β και Γ είναι ίσες.

2) Το ισόπλευρο τρίγωνο



Έστω ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.

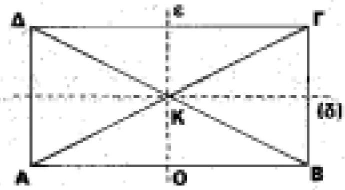
Αυτό είναι ισοσκελές κατά τρεις τρόπους.

1) ΑΒ = ΑΓ. Άρα η ΒΓ είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

2) ΑΒ = ΒΓ. Άρα η ΑΓ είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου.
3) ΑΓ = ΒΓ. Άρα η ΑΒ είναι βάση του ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα:
(i) Τα τρία ύψη του τριγώνου είναι άξονες συμμετρίας του σχήματος. Άρα είναι διάμεσοι και διχοτόμοι.
(ii) Οι τρεις γωνίες του είναι ίσες.
Άρα Α = Β = Γ = 60

3) Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Έστω το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

Χαράζουμε την μεσοκάθετη (ε) της πλευράς ΑΒ.

Διαπιστώνουμε με στροφή κατά 180 γύρω από την (ε) ότι είναι άξονας συμμετρίας του σχήματος.

Άρα ισχύουν τα εξής:
1) ΑΔ = ΒΓ, επειδή ταυτίζονται κατά την στροφή.
2) Επειδή η (ε) διέρχεται από το σημείο τομής Κ των διαγωνίων του παραλληλογράμμου, το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ισοσκελές. Άρα ΑΚ = ΚΒ.
3) Η (ε) είναι μεσοκάθετος και στην ΔΓ. Άρα και το τρίγωνο ΔΚΓ είναι ισοσκελές. Άρα ΔΚ = ΚΓ.
4) Με τον ίδιο τρόπο διαπιστώνουμε ότι και η άλλη μεσοκάθετος (δ) είναι επίσης άξονας συμμετρίας του σχήματος.

Άρα ΑΒ = ΓΔ, ΑΚ = ΚΔ και ΚΓ = ΚΒ.

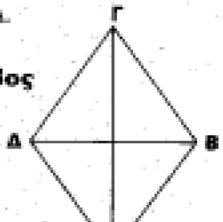
Συμπέρασμα:

Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει δύο άξονες συμμετρίας.

Οι διαγώνιές του διχοτομούνται και είναι ίσες.

Ορίζονται τέσσερα ισοσκελή τρίγωνα. Τα ΑΚΒ, ΑΚΔ, ΒΚΓ, ΓΚΔ.

4) Ο ρόμβος



Ας σχεδιάσουμε ένα ρόμβο ΑΒΓΔ.

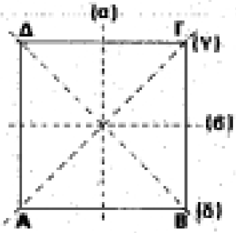
Παρατηρούμε ότι η διαγώνιος ΑΓ είναι άξονας συμμετρίας.

Άρα:
1) Η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί την διαγώνιο ΔΒ.
2) Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ισοσκελή.
Άρα α) ΔΓ = ΒΓ, ΑΔ = ΑΒ. β) Η διαγώνιος ΑΓ διχοτομεί τις γωνίες Α και Γ.

Τα ίδια συμπεράσματα έχουμε και για την άλλη διαγώνιο.

Έτσι για τον ρόμβο έχουμε τις εξής ιδιότητες:
1) Ο ρόμβος έχει δύο άξονες συμμετρίας.
2) Όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Πράγματι λόγω της συμμετρίας έχουμε ΑΒ = ΒΓ = ΓΔ = ΑΔ.
3) Οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
4) Οι διαγώνιες διχοτομούν τις γωνίες του ρόμβου.
5) Ορίζονται 4 ισοσκελή τρίγωνα, τα ΑΒΓ, ΑΔΓ, ΒΓΔ, ΑΒΔ.
6) Ορίζονται 4 ορθογώνια τρίγωνα, τα ΑΟΒ, ΑΟΔ, ΒΟΓ, ΓΟΔ.

5) Το τετράγωνο

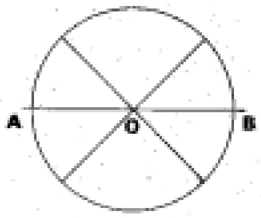


Το τετράγωνο έχει τους ίδιους άξονες συμμετρίας με το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Επίσης έχει τους ίδιους άξονες συμμετρίας με αυτούς του ρόμβου.

Έτσι έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογώνιου παραλληλογράμμου καθώς και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Δηλαδή:
1) Έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες.
2) Έχει τις διαγώνιες ίσες.
3) Οι διαγώνιες διχοτομούνται.
4) Κάθε διαγώνιος είναι μεσοκάθετος της άλλης.
5) Οι διαγώνιοι διχοτομούν τις γωνίες του.

6) Ο κύκλος



Ας χαράξουμε ένα κύκλο και ας φέρουμε μια τυχαίο διάμετρό του.

Με στροφή γύρω από την διάμετρο διαπιστώνουμε ότι το ένα ημικύκλιο ταυτίζεται με το άλλο. Δηλαδή καθεμιά διάμετρός του είναι άξονας συμμετρίας του.

Υπάρχουν πολλά σχήματα που έχουν ομορφιά, αρμονία. Ταυτόχρονα όμως αυτά έχουν και πολλές ιδιότητες. Όπως είδαμε οι πιο πολλές από αυτές οφείλονται στην ύπαρξη συμμετρίας.