Author: Π. Χριστοφόρου

Title: Πολλαπλάσια φυσικών αριθμών. Κλασματικοί αριθμοί

Creator: HDML

Εξακριβώνουμε ότι ο 10 επαληθεύει την αρχική εξίσωση δηλ. $4 \cdot 10 + 15 = 55$.

Παρατήρηση: Είναι λάθος να γράψουμε ότι $4x + 15 = 19x$, γιατί προσθέτουμε (και αφαιρούμε) μόνο όμοια πράγματα, ενώ εδώ ο 4 x είναι άγνωστος αριθμός και δεν μπορεί να προστεθεί κατευθείαν με τον 15, που είναι γνωστός. Μόνο αν είχαμε το άθροισμα $4x + 15x$ θα γράφαμε ότι είναι ίσο με 19x, αφού εδώ προσθέτουμε ομοειδείς αριθμούς (τέσσερα x + δεκαπέντε x = δεκαεννιά x).

β) Να λυθεί η εξίσωση $(2x-7):3=5$.
Στη διαίρεση αυτή η παρένθεση $(2x-7)$ είναι ο διαιρετέος, γι' αυτό μπορούμε να γράψουμε:

$$(2x-7):3=5 \Leftrightarrow 3 \cdot 5 = 2x-7 \Leftrightarrow 2x-7=15.$$

Τώρα έχουμε μια εξίσωση όπως στο προηγούμενο παράδειγμα και τη λύνουμε παρόμοια:

$$2x-7=15 \Leftrightarrow 7+15=2x \Leftrightarrow 2x=22 \Leftrightarrow 22:2=x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=11$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή του x στην αρχική εξίσωση, βρίσκουμε ότι πράγματι:

$$(2 \cdot 11-7):3=5$$

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $x+5x+30=180$.
Στο πρώτο μέλος της εξίσωσης μπορούμε να προσθέσουμε τους όρους x και 5x, γιατί είναι όμοιοι. Έχουμε λοιπόν $x+5x=6x$ (δηλ. ένα x + πέντε x = έξι x).
Έτσι η εξίσωση γίνεται: $6x+30=180 \Leftrightarrow 180-30= = 6x \Leftrightarrow 6x=150 \Leftrightarrow 150:6=x \Leftrightarrow x=25$

Σημείωση: Στις προηγούμενες περιπτώσεις, είχαμε στις εξισώσεις μόνο φυσικούς αριθμούς. Παρόμοια εργαζόμαστε αν στις εξισώσεις υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί.

4. Εφαρμογές στη λύση προβλημάτων

α) Με ποιον αριθμό πρέπει να διαιρεθεί ο αριθμός 361 για να δώσει πηλίκο 12 και υπόλοιπο 25;

Ξέρουμε ότι σε κάθε διαίρεση αν πολ/με τον διαιρέτη (δ) με το πηλίκο (π) και προσθέσουμε το υπόλοιπο (υ), βρίσκουμε τον διαιρετέο (Δ), πιο σύντομα: $\delta\,\pi+\upsilon=\Delta$, όπου $\upsilon \geq 0$ και $\upsilon<\delta$.

Αν ονομάσουμε x τον διαιρέτη που ζητούμε θα έχουμε την εξίσωση: $x \cdot 12+25=361$. Λύνοντάς της θα βρούμε τον ζητούμενο διαιρέτη. Έτσι

$$x \cdot 12+25=361 \Leftrightarrow 361-25=x \cdot 12 \Leftrightarrow x \cdot 12=336$$
$$\Leftrightarrow 336:12=x \Leftrightarrow x=28$$

β) Να βρεθούν οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ αν η γωνία Α είναι διπλάσια της Γ και η γωνία Β είναι μεγαλύτερη της Γ κατά 40°.

Αν ονομάσουμε x τη γωνία Γ τότε η Α θα είναι $2 \cdot x$ και η Β θα είναι $x+40$.

Επειδή σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι 180°, θα έχουμε την εξίσωση:

$$2x+(x+40^\circ)+x=180^\circ \Leftrightarrow$$
$$(2x+x+x)+40^\circ=180^\circ \Leftrightarrow$$
$$4x+40^\circ=180^\circ \Leftrightarrow$$
$$4x=180^\circ-40^\circ \Leftrightarrow$$
$$4x=140^\circ \Leftrightarrow$$
$$x=140^\circ:4 \Leftrightarrow$$
$$x=35^\circ$$

Ώστε $\Gamma=35^\circ$, $A=2 \cdot 35^\circ=70^\circ$ και
$B=35^\circ+40^\circ=75^\circ$

γ) Δυο οικόπεδα έχουν διαφορά $900m^2$ και το ένα είναι τετραπλάσιο του άλλου. Να βρεθεί το εμβαδό του καθενός.

Αν ονομάσουμε x το μικρότερο, τότε το μεγαλύτερο θα είναι $4 \cdot x$ και εφ' όσον έχουν διαφορά $900m^2$, θα έχουμε την εξίσωση:

$$4x-x=900 \Leftrightarrow 3x=900 \Leftrightarrow x=900:3 \Leftrightarrow x=300$$

Άρα το μικρότερο είναι $300m^2$ και το μεγαλύτερο $4 \cdot 300=1.200m^2$.

Πολλαπλάσια φυσικών αριθμών – Κλασματικοί αριθμοί

Π. Χριστοφόρου

Ξέρουμε ότι για να βρούμε τα πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού **α** πολλαπλασιάζουμε τον **α** με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Και επειδή το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι απειροσύνολο γιαυτό και το σύνολο των πολλαπλασίων ενός φυσικού αριθμού α (με $\alpha \neq 0$) είναι και αυτό απειροσύνολο. Έτσι αν συμβολίσουμε με Π_α το σύνολο αυτό θα έχουμε:

$\Pi_\alpha = \{0.\alpha,\ 1.\alpha,\ 2.\alpha,\ 3.\alpha,\ ...\} =$

$= \{0,\ \alpha,\ 2.\alpha,\ 3.\alpha,\ ...\}$

Τους αριθμούς **2α, 3α, ...** τους λέμε αντίστοιχα **διπλάσιο του α, τριπλάσιο του α** κ.ο.κ.

Για τα πολλαπλάσια των αριθμών 0, 1 και 2 μπορούμε να πούμε ότι:

α) Το Π_0 είναι το μόνο από τα σύνολα Π_α που δεν είναι απειροσύνολο, γιατί $\Pi_0 = \{0\}$

β) Το σύνολο Π_1 είναι ίσο με το N γιατί $\Pi_1 = \{0{\cdot}1,\ 1{\cdot}1,\ 2{\cdot}1,\ 3{\cdot}1,\ ...\} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\} = N$ και

γ) Το σύνολο Π_2 είναι ίσο με το σύνολο N_α των αρτίων αριθμών, γιατί

$\Pi_2 = \{0{\cdot}2,\ 1{\cdot}2,\ 2{\cdot}2,\ 3{\cdot}2,\ ...\} =$

$= \{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ ...\} = N_\alpha.$

Παρατηρήσεις των Πυθαγορείων

Στα πολλαπλάσια των φυσικών αριθμών οι Πυθαγόρειοι έκαναν ορισμένες παρατηρήσεις που συμφωνούσαν μάλιστα και με την κοσμοθεωρία τους, δηλαδή, ότι η ύλη δεν αλλοιώνεται αλλά απλώς αλλάζει μορφή. Ας δούμε μερικές από αυτές.

α) Αν στη γραφή ενός οποιουδήποτε διψήφιου φυσικού αριθμού αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του θα παρατηρήσουμε ότι το άθροισμα των δύο αυτών αριθμών (αυτού που έχουμε και αυτού που προκύπτει από την αντιμετάθεση των ψηφίων του) είναι πολλαπλάσιο του 11.

Για παράδειγμα ας πάρουμε τον αριθμό 12. Αν αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του θα βρούμε τον αριθμό 21. Αν τώρα προσθέσουμε τους δυο αυτούς αριθμούς θα βρούμε:

$$12 + 21 = 33 = 3 \cdot 11 = \text{πολ. } 11$$

Το ότι η παρατήρηση αυτή ισχύει για οποιονδήποτε διψήφιο φυσικό αριθμό μπορούμε να το αποδείξουμε στηριζόμενοι σε γνωστές μας ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Έτσι αν ονομάσουμε x το ψηφίο που φανερώνει τις δεκάδες και ψ το ψηφίο που φανερώνει τις απλές μονάδες ενός διψήφιου αριθμού τότε τον αριθμό αυτό μπορούμε να το γραψουμε: $\mathbf{10 \cdot x + \psi}$. Ο διψήφιος αριθμός που προκύπτει από τον $10 \cdot x + \psi$ αν αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του θα είναι ο $\mathbf{10 \cdot \psi + x}$ και θα έχουμε:

$$(10 \cdot x + \psi) + (10 \cdot \psi + x) =$$
$$= (10 \cdot x + x) + (10 \cdot \psi + \psi) =$$
$$= 11 \cdot x + 11 \cdot \psi =$$
$$= 11 \cdot (x + \psi) =$$
$$= (x + \psi) \cdot 11 = \text{πολ. } 11$$

β) Αν στη γραφή ενός οποιουδήποτε διψήφιου αριθμού αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του θα παρατηρήσουμε ότι η διαφορά των δυο αυτών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 9.

Πράγματι αν πάρουμε τον αριθμό 61 και αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του θα προκύψει ο 16 και θα έχουμε:

$$61 - 16 = 45 = 5 \cdot 9 = \text{πολ. } 9$$

Ομοίως αν πάρουμε τον 13 και αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του θα προκύψει ο 31 και θα έχουμε:

$$31 - 13 = 18 = 2 \cdot 9 = \text{πολ. } 9$$

γ) Αν στη γραφή ενός οποιουδήποτε τριψήφιου αριθμού αντιμεταθέσουμε τα ψηφία που φανερώνουν τις εκατοντάδες και τις απλές μονάδες του θα παρατηρήσουμε ότι η διαφορά των δυο αυτών φυσικών αριθμών είναι πολλαπλάσιο του 9, του 11 και του 99.

Πράγματι αν πάρουμε τον αριθμό 315 και αντιμεταθέσουμε τα ψηφία του 3 και 5 θα προκύψει ο 513 και θα έχουμε:

$513 - 315 = 198 = 22 \cdot 9 = \text{πολ. } 9$ ή

$513 - 315 = 198 = 18 \cdot 11 = \text{πολ. } 11$ ή

$513 - 315 = 198 = 2 \cdot 99 = \text{πολ. } 99.$

Συνέχεια από σελ. 13.

Πηγές

α) A Concise History of Mathematics - Dirk Struik. (Μετάφρ. Άννας Φερεντίνου).

β) The Historical Roots of Elementary Mathematics - L. Bunt, P. Jones, J. Bedient (Μετάφρ. Άννας Φερεντίνου).

γ) Number Systems of N. American Indians - W. Eels.

Πώς και γιατί φτιάξαμε τα κλάσματα;

Κλασματικές μονάδες

Αν κόψουμε μια κλωστή σε **δύο ίσα κομμάτια** το καθένα από αυτά λέμε ότι είναι **το ένα δεύτερο της κλωστής**. Αν την κόψουμε σε **τρία ίσα κομμάτια** το καθένα λέμε ότι είναι **το ένα τρίτο της**, σε **τέσσερα, το ένα τέταρτό της** κ.λ.π. Τους αριθμούς αυτούς (**ένα δεύτερο της κλωστής, ένα τρίτο της κλωστής, ένα τέταρτο της κλωστής, ...**) τους λέμε **συγκεκριμένες κλασματικές μονάδες** και τους συμβολίζουμε

αντίστοιχα με τα σύμβολα $\frac{1}{2}$ **της κλωστής**, $\frac{1}{3}$ **της κλωστής**, $\frac{1}{4}$ **της κλωστής**, ...

Αν τώρα **δούμε την κλωστή σαν μια ακέραια μονάδα, τα ίσα κομμάτια της κλωστής θα τα δούμε σαν ίσα μέρη της ακεραίας μονάδας.** Έτσι φτιάχνουμε τους αριθμούς $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... που τους λέμε **κλασματικές μονάδες.**

[Οι κλασματικές μονάδες μας θυμίζουν τα αρχαία αιγυπτιακά κλάσματα, όπως τα είδαμε στο 2ο τεύχος].

Κλασματικοί αριθμοί

Κόβουμε μια κλωστή σε 4 ίσα κομμάτια. Αν από αυτά πάρουμε τα 3 και τα ενώσουμε, η κλωστή που θα φτιάξουμε λέμε ότι είναι **τα τρία τέταρτα της κλωστής** που είχαμε. Έτσι φτιάχνουμε τον αριθμό **τρία τέταρτα της κλωστής** και για συντομία γράφουμε $\frac{3}{4}$ **της κλωστής**. Τον αριθμό αυτό το λέμε **συγκεκριμένο κλασματικό αριθμό** ή **συγκεκριμένο κλάσμα.**

Με τον ίδιο τρόπο, **αν δούμε την κλωστή σαν μιαν ακεραία μονάδα**, φτιάχνουμε τον αριθμό **τρία τέταρτα** και για συντομία γράφουμε $\frac{3}{4}$. Τον αριθμό αυτό το λέμε **κλασματικό αριθμό** ή **κλάσμα.**

Μπορούμε λοιπόν να πούμε ότι η ανάγκη να εκφράσουμε με αριθμό ένα ή περισσότερα από τα ίσα μέρη στα οποία χωρίζουμε μια ποσότητα, μας έκανε να φτιάξουμε τα κλάσματα.

Το κλάσμα σαν γινόμενο ακεραίου επί μια κλασματική μονάδα

Είδαμε ότι με το κλάσμα $\frac{3}{4}$ εννοούμε **τα 3 από τα 4 ίσα μέρη** στα οποία χωρίζουμε την ακέραια μονάδα. Και επειδή το καθένα από τα 4 αυτά ίσα μέρη είναι η κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$ γιαυτό μπορούμε να πούμε ότι **το κλάσμα $\frac{3}{4}$ είναι 3 φορές η κλασματική μονάδα $\frac{1}{4}$** . Δηλαδή:

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4}$$

Γενικά ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$$

(όπου ο **α** μπορεί να πάρει τις τιμές **0,1,2,3,...** και ο **β** τις τιμές **1,2,3,...**).

Το κλάσμα σαν πηλίκο διαίρεσης

Αν έχουμε 3 ίδια μήλα και θέλουμε να τα μοιράσουμε εξίσου σε 4 παιδιά θα πρέπει το κάθε μήλο να το κόψουμε σε 4 ίσα κομμάτια. Στη συνέχεια, τα 12 κομμάτια που θα βγουν θα τα χωρίσουμε σε 3 ίσα μέρη. Και επειδή το καθένα κομμάτι είναι το $\frac{1}{4}$ του μήλου, γιαυτό το κάθε παιδί θα πάρει $3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ του μήλου. Επομένως μπορούμε να πούμε ότι **το αποτέλεσμα της διαίρεσης αυτής,** δηλαδή **το κλάσμα $\frac{3}{4}$ του μήλου** είναι το πηλίκο της διαίρεσης 3 μήλα: 4. Δηλαδή:

$$3 \text{ μήλα}: 4 = \frac{3}{4} \text{ του μήλου}$$

Αν τώρα δούμε τα τρία μήλα σαν τρεις ακέραιες μονάδες μπορούμε να πούμε ότι το κλάσμα $\frac{3}{4}$ είναι το πηλίκο της διαίρεσης του 3 δια του 4. Δηλαδή:

$$3:4 = \frac{3}{4} \quad \text{. Γενικά:} \quad \alpha:\beta = \frac{\alpha}{\beta}$$

(όπου ο **α** παίρνει τις τιμές **0,1,2,3,...** και ο **β** τις τιμές **1,2,3,...**).

Ειδικές περιπτώσεις κλασμάτων

1. **Κλάσματα της μορφής** $\frac{\alpha}{\alpha}$ (με $\alpha = 1,2,3,...$).

Επειδή 12 δρχ. αν τις μοιράσουμε εξίσου σε 12 παιδιά το καθένα θα πάρει από 1 δρχ., γιαυτό μπορούμε να πούμε ότι ισχύει:

$$12 \text{ δρχ.}:12 = \frac{12 \text{ δρχ.}}{12} = 1 \text{ δρχ.}$$

Επομένως ισχύει:

$$\boxed{\frac{12}{12} = 1} \quad \text{και γενικά:} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\alpha} = 1}$$

(με $\alpha = 1,2,..$)

2. **Κλάσματα της μορφής** $\frac{0}{\alpha}$ (με $\alpha = 1,2,3,...$)

Επειδή όταν δεν έχουμε χρήματα (ή όταν έχουμε 0 δρχ.) και θέλουμε να τα μοιράσουμε σε 12 παιδιά, το καθένα παιδί θα πάρει από 0 δρχ., γιαυτό μπορούμε να πούμε ότι:

$$0 \text{ δρχ.}:12 = \frac{0 \text{ δρχ.}}{12} = 0 \text{ δρχ.}$$

Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\frac{0}{12} = 0} \quad \text{και γενικά:} \quad \boxed{\frac{0}{\alpha} = 0}$$

(με $\alpha = 1,2,3,...$)

3. **Κλάσματα της μορφής** $\frac{\alpha}{1}$ (με $\alpha = 0,1,2,3,...$)

Επειδή όταν θέλουμε να μοιράσουμε 12 δρχ. σε ένα παιδί, το παιδί αυτό θα πάρει και τις 12 δρχ. γιαυτό μπορούμε να πούμε ότι:

$$12 \text{ δρχ.}:1 = \frac{12 \text{ δρχ.}}{1} = 12 \text{ δρχ.}$$

Επομένως το κλάσμα $\frac{12}{1}$ είναι ίσο με 12. Δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\frac{12}{1} = 12} \quad \text{και γενικά:} \quad \boxed{\frac{\alpha}{1} = \alpha}$$

(με $\alpha = 0,1,2,3,...$)

4. **Κλάσματα της μορφής** $\frac{\alpha}{0}$ (με $\alpha = 1,2,...$).

Είναι λογικό **να μη μπορούμε να μοιράσουμε 12 δρχ. αν δεν υπάρχουν άτομα** (ή αν υπάρχουν **0 άτομα**).

Γιαυτό λέμε ότι **η διαίρεση.**

12 δρχ.:0 δε γίνεται και επομένως δεν μπορούμε να γράψουμε κλάσμα της μορφής $\frac{12}{0}$ ή γενικά της μορφής $\frac{\alpha}{0}$ (με $\alpha = 1,2,...$).

Ένας τρόπος, που μπορεί να μας πείσει ότι η τιμή ενός κλάσματος της μορφής $\frac{\alpha}{0}$ (με $\alpha = 1,2,3,...$) δεν είναι αριθμός που χρησιμοποιούμε στην αριθμητική, είναι ο παρακάτω.

Μια και κάθε κλάσμα της μορφής $\frac{\alpha}{\beta}$ (με $\beta \neq 0$) μπορούμε να το πάρουμε σαν πηλίκο της διαίρεσης του **α** δια **β**, ας δούμε τι γίνεται στη διαίρεση όταν ο διαιρετέος παραμένει ο ίδιος, ενώ ο διαιρέτης μικραίνει ασταμάτητα. ΄Ετσι θα δούμε τότε και τι συμβαίνει στα κλάσματα όταν ο αριθμητής τους μένει ο ίδιος ενώ ο παρονομαστής τους μικραίνει συνέχεια. Για παράδειγμα:

$$\frac{12}{4} = 12:4 = 3,\ \frac{12}{3} = 12:3 = 4,\ \frac{12}{2} = 12:2 = 6,$$

$$\frac{12}{1} = 12:1 = 12,\ \frac{12}{\frac{1}{2}} = 12:\frac{1}{2} = 12\cdot\frac{2}{1} = 24,$$

$$\frac{12}{\frac{1}{20}} = 12:\frac{1}{20} = 12\cdot\frac{20}{1} = 240,\ \frac{12}{\frac{1}{1000}} = 12:\frac{1}{1000} =$$

$= 12\cdot\frac{1000}{1} = 12000$ κ.λ.π. Αν προσέξουμε τώρα τα πηλίκα (3,4,6,24,240,12000,....) των διαιρέσεων (12:4, 12:3, 12:2, 12:1, ...) θα παρατηρήσουμε ότι όσο ο διαιρέτης μικραίνει, αυτά μεγαλώνουν. ΄Ετσι και στα κλάσματα $\frac{12}{4}, \frac{12}{3}, \frac{12}{2}, \ldots$ όσο μικραίνει ο παρονομαστής τους, αυτά μεγαλώνουν. Στο σημείο αυτό γεννιέται το ερώτημα. Αν μπορούσαμε να πούμε ποιος είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός **θ** και αν συνεχίζαμε να μικραίνουμε τον παρονομαστή β των κλασμάτων $\frac{12}{\beta}$ μέχρι να γίνει ίσος με τον θ, τότε με ποιον αριθμό της αριθμητικής θα ήταν ίσο το κλάσμα $\frac{12}{\theta}$;

Ασφαλώς θα έπρεπε να ήταν ίσο με τον μεγαλύτερο θετικό που υπάρχει. Μπορούμε όμως να πούμε ποιος είναι ο αριθμός αυτός, αφού οι αριθμοί μεγαλώνουν ασταμάτητα; Μα φυσικά, όχι. ΄Ετσι λοιπόν συμπεραίνουμε ότι μικρότερος θετικός αριθμός **θ** δεν υπάρχει, ο παρονομαστής των πιο πάνω κλασμάτων μπορεί να πλησιάζει όσο θέλουμε το μηδέν και τα κλάσματα να μεγαλώνουν ξεπερνώντας όλους τους αριθμούς της αριθμητικής. Γιαυτό δεν υπάρχει αριθμός που να ισούται με 12/0 και γενικότερα με α/0 (με α = 1, 2,...).

5. Κλάσματα της μορφής $\frac{0}{0}$.

Αν ονομάσουμε **x** την τιμή του κλάσματος $\frac{0}{0}$, θα έχουμε:

$\frac{0}{0} = x \Leftrightarrow$

$0:0 = x \Leftrightarrow$ γιατί $0:0 = \frac{0}{0}$

$0 = 0\cdot x$ γιατί αν $\alpha:\beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta\cdot\gamma$

Η ισότητα όμως $\mathbf{0 = 0\cdot x}$ ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του **x**, γιατί ξέρουμε ότι οποιονδήποτε αριθμό πολλαπλασιάσουμε με το 0 θα μας δώσει 0. ΄Ετσι δεν είναι λάθος να πούμε ότι:

$$\frac{0}{0} = 4,\ \frac{0}{0} = -12,\ \frac{0}{0} = \frac{3}{4} \text{ κ.λ.π.}$$

Με άλλα λόγια, **δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε την τιμή του κλάσματος $\frac{0}{0}$.**

Γιαυτό λέμε ότι το κλάσμα $\frac{0}{0}$ έχει **απροσδιόριστη τιμή.**

Ασκήσεις που προτείνουμε

Λ.Θ.

Α51 Μια πεδινή έκταση με σχήμα ταινίας πλάτους 75 μέτρων πρόκειται να χωριστεί κατά μήκος σε χωράφια σχήματος ορθογωνίου, ώστε το καθένα να έχει εμβαδό 6 στρέμματα. Τι μήκος θα έχει το καθένα χωράφι;

Α52. Δεξαμενή με σχήμα ορθογ. παραλ/δου έχει μήκος 8cm και πλάτος 5m. Ποιο είναι το ύψος της αν η χωρητικότητά της είναι 120 m^3;

Α53 ΄Ενα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 48cm. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του αν η μία είναι τριπλάσια της άλλης.

Α54 Σ΄ ένα ισοσκελές τρίγωνο η γωνία της κορυφής είναι διπλάσια από μια γωνία της βάσης του. Να υπολογιστούν οι τρεις γωνίες του τριγώνου. Ποιο είναι το είδος του τριγώνου από τις γωνίες;