Author: Άγνωστος Συγγραφέας

Title: Για την Ά Τάξη. Πολλαπλασιασμός θετικών και αρνητικών αριθμών.

Abstract: Πολλαπλασιασμός των προσημασμένων αριθμών.

Creator: HDML

ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ (ΔΗΛΑΔΗ ΠΡΟΣΗΜΑΣΜΕΝΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ)

(Β.Π.)

§1. Γιά τόν πολ/μό τῶν προσημασμένων ἀριθμῶν μιλήσαμε τό 3ο ἐλεύθερο μάθημα τοῦ προηγούμενου τεύχους. Καλό θά ἦταν τά παιδιά τῆς Α΄ τάξης νά διαβάσουν αὐτό τό 3ο μάθημα πού περιγράφει τόν πολ/μό τῶν προσημασμένων καί τό 4ο μάθημα αὐτοῦ τοῦ τεύχους, σχετικό μέ τίς ἰδιότητες τοῦ πολ/μοῦ. Ἐδῶ μποροῦμε νά δόσουμε μερικά παραδείγματα, σάν ἐφαρμογές τῶν μαθημάτων αὐτῶν, ποῦ εἶχαν σάν κατάληξη ὅτι, **γιά νά βροῦμε τό γινόμενο δυό προσημασμένων ἀκεραίων, ἀναλύουμε τόν πολ/τή στίς θ ε τ ι κ έ ς του μονάδες καί στή θέση τους τοποθετοῦμε ὁλόκληρο τόν πολ/τέο.**

Ὅταν λέμε «ὁλόκληρο τόν πολ/τέο» ἐννοοῦμε μέ τό πρόσημό του ἤ + ἤ -, ὅποιο κι ἄν εἶναι. Ἄς προχωρήσουμε λοιπόν στά παραδείγματά μας.

§2. Παράδειγμα 1ο. (ὅταν ὁ πολ/τής εἶναι θετικός).

Ἄς ποῦμε ὅτι θέλουμε νά πολ/σουμε τούς ἀριθμούς:

$(-7)(+5)$

α) Ἀναλύουμε τόν +5 στίς θετικές του μονάδες:

$$+5 = +1 +1 +1 +1 +1$$

β) Ἀντικαθιστοῦμε τά +1 μέ ὁλόκληρο τόν πολ/τέο:

$$(-7)(+5) = -7 -7 -7 -7 -7 = -35$$

Γιά συντομία ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα ὅτι, «τό γινόμενο ἑτεροσήμων εἶναι πάντα ἀρνητικό» ἤ ἀλλιῶς «σύν ἐπί πλήν κάνει πλήν».

Παράδειγμα 2ο. (ὅταν ὁ πολ/τής εἶναι ἀρνητικός).

Ἄς ποῦμε ὅτι θέλουμε νά πολ/σουμε τούς ἀριθμούς:

$(-8)(-3)$

α) Ἀναλύουμε τόν -3 στίς θετικές του μονάδες:

$$-3 = -(+1) -(+1) -(+1)$$

β) Ἀντικαθιστοῦμε τά +1 μέ ὁλόκληρο τόν πολ/τέο:

$$(-8)(-3) = -(-8) -(-8) -(-8)$$

Ἀλλά στό 4ο μάθημα ἐξηγήσαμε τή σημασία τοῦ $-(-8)$ ἤ ἄλλων ὁμοίων δηλαδή ὅτι:

$-(-8) = -(-1)\cdot(-8) = +8$ ὥστε:
$(-8)(-3) = -(-8) -(-8) -(-8) = +8 +8 +8 = +24$

Γιά συντομία ἐφαρμόζουμε τόν κανόνα ὅτι «τό γινόμενο ὁμοσήμων εἶναι πάντα θετικό» ἤ ἀλλιῶς «πλήν ἐπί πλήν κάνει σύν, καθώς καί σύν ἐπί σύν κάνει σύν».

Μέ τόν τρόπο πού ἐκθέσαμε πιό πάνω, μποροῦμε νά κάνουμε κάθε πολ/μό προσημασμένων ἀκεραίων.

Παράδειγμα 3ο. Ἄς πάρουμε τόν πολ/μό

$$(-16)(+4)$$

Γιά σύντομο ἀποτέλεσμα μποροῦμε νά ποῦμε: 16 ἐπί 4 μᾶς δίνει 64 καί ἐπειδή οἱ παράγοντες εἶναι **ἑτερόσημοι**, τό γινόμενο θά εἶναι **ἀρνητικό.** Ὥστε:

$$(-16)(+4) = -64$$

Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα μποροῦμε νά βροῦμε μέ τήν ἀναλυτική μέθοδο τῶν παραδειγμάτων 1 καί 2. Δηλαδή:

α) Ἀναλύουμε τό +4 στίς θετικές του μονάδες:

$$+4 = +1 +1 +1 +1$$

β) Ἀντικαθιστοῦμε τά +1 μέ ὁλόκληρους τούς πολ/τέους:

$$6)(+4) = -16 -16 -16 -16 = -64$$

Παράδειγμα 4ο. Ἄν θέλουμε νά κάνουμε τόν πολ/μό: $(+11)(-4)$

α) Ἀναλύουμε τό -4 στίς θετικές του μονάδες:

$$-4 = -(+1) -(+1) -(+1) -(+1)$$

β) Ἀντικαθιστοῦμε τά +1 μέ ὁλόκληρο τόν πολ/τέο:

$$(+11)(-4) = -(+11) -(+11) -(+11) -(+11)$$

καί τώρα ἐκτελοῦμε τίς πράξεις:

$$(+11)(-4) = -11 -11 -11 -11 = -44$$

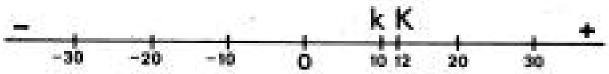
Μέ συντομία μποροῦμε νά ποῦμε: 11 ἐπί 4 μᾶς δίνει 44 καί ἐπειδή ἔχουμε νά πολ/σουμε ἑτερόσημους, τό γινόμενο θά εἶναι ἀρνητικό. Ὥστε:

$$(+11)(-4) = -44$$

Σπουδαία παρατήρηση: Ἀπ᾽ ὅσα εἴπαμε μέχρι τώρα φαίνεται καθαρά ὅτι ὁ πολ/μός εἶναι μιά πράξη ἀντικατάστασης. Μέ ἄλλα λόγια: **ἀντικαθιστώντας τίς θετικές μονάδες ἑνός ἀριθμοῦ μέ κάποιον ἄλλον ἀριθμό** καί μετά ἐργαζόμαστε μέ αὐτόν τόν ἄλλον **σάν νά ἦτανε μονάδα.**

Πρόβλημα. Πάνω σέ ἕναν ἄξονα πού δείχνει θετική καί ἀρνητική φορά καί εἶναι βαθμολογημένος σέ cm (ἑκατοστά), δυό κινητά **K** καί **κ** κινοῦνται μέ πηδήματα πού τά κάνουν ταυτόχρονα. Τό **K** κάνει πήδημα 12 cm. Τό **κ** κάνει πήδημα 10 cm. Ξεκινοῦν καί τά δύο ἀπό τό σημεῖο 0. Πρῶτο ξεκινᾶ τό **K** καί κάνει πρός τά δεξιά ἕνα πήδημα. Ἀμέσως μετά ξεκινᾶ τό ἄλλο κινητό **κ** καί συνεχίζουν μαζί.

– Τί λέτε, τά κινητά θά συναντηθοῦν; Καί πόσα πηδήματα θά χρειαστοῦν ὡς τήν ἐνδεχόμενη συνάντηση;



Ἄν σκεφτοῦμε πώς θά χρειαστοῦν π πηδήματα γιά τό **κ**, τότε τό κινητό **K** θά ἔχει κάμει (π+1) πηδήματα.

Τώρα ἡ ἀπόσταση πού κινήθηκαν εἶναι: τό **K** κινήθηκε σέ ἀπόσταση 12·(π+1) cm καί τό **κ** σέ ἀπόσταση 10·π cm. Ἀφοῦ ξεκίνησαν ἀπό τό ἴδιο σημεῖο καί **ὑποτίθεται ὅτι θά συναντηθοῦν,** ἄρα πρέπει οἱ ἀποστάσεις πού κινήθηκαν **νά εἶναι ἴσες.** Δηλαδή:

$$12\cdot(\pi+1) = 10\cdot\pi$$

Αὐτή ὅμως ἡ παράσταση εἶναι **μιά ἐξίσωση.** Προχωροῦμε στή λύση τῆς ἐξίσωσης:

$$\begin{aligned} 12\pi+12 &= 10\pi \\ 12\pi-10\pi &= -12 \\ 2\pi &= -12 \\ \text{καί}\quad \pi &= -6 \end{aligned}$$

Ἡ λύση λοιπόν τῆς ἐξίσωσης μᾶς λέει ὅτι θά χρειαστοῦν γιά τή συνάντηση –6 πηδήματα, δηλαδή πηδήματα πρός τήν ἀρνητική διεύθυνση τοῦ ἄξονα, πηδήματα πρός τά ἀριστερά. **Πραγματικά:** Τά 6 πηδήματα τοῦ **κ** ἀπό τή θέση 0 πρός τ᾽ ἀριστερά, θά τό φέρουν στή θέση –60 cm. Τά 6 πηδήματα τοῦ **K** ἀπό τή θέση 12 cm πρός τά ἀριστερά, θά τό φέρουν 6×12=72 ἑκατοστά πρός τ᾽ ἀριστερά, μεῖον τά 12 ἑκατοστά τῆς ἀφετηρίας, δηλαδή θά τό φέρουν κι αὐτό στήν ἴδια θέση –60 cm τοῦ ἄξονα. **Ἄρα θά συναντηθοῦν.** Ἀλλά θά συναντηθοῦν ὑπό τόν ὅρο ὅτι, μετά τό πρῶτο πρός τά δεξιά πήδημα τοῦ **K, θά ἐπακολουθήσουν 6 πηδήματα καί τῶν δύο μαζί καί πρός τ᾽ ἀριστερά,** πρός τήν ἀρνητική διεύθυνση τοῦ ἄξονα.

Ἄξιο παρατήρησης εἶναι τό ὅτι ἡ χρήση τῶν ἀρνητικῶν ἀριθμῶν μᾶς βοήθησε νά καταλάβουμε πώς, **γιά νά γίνει συνάντηση** τῶν κινητῶν **K** καί **κ,** θά πρέπει ν᾽ **ἀλλάξει κατεύθυνση ἡ κίνησή τους** καί νά γίνει ἀντίθετη, πράγμα πού οἱ ἀπόλυτοι ἀριθμοί δέν θά μποροῦσαν νά μᾶς τό δείξουν.

§3. Στή συνέχεια τῶν παραδειγμάτων πολ/μοῦ θά δώσουμε τίς **λύσεις μερικῶν ἀσκήσεων** τοῦ προηγούμενου τεύχους.

E_6: Πῶς μποροῦμε ν᾽ ἀπαλλάξουμε τίς παραστάσεις ἀπό τίς παρενθέσεις; (Γιά νά ἀπαλλάξουμε ἀπό παρενθέσεις, θά πρέπει νά κάνουμε τούς πολ/μούς πού δείχνουν οἱ παρενθέσεις. Εἴπαμε ὅτι ἡ παρένθεση εἶναι τό σύμβολο τοῦ πολλαπλασιασμοῦ.)

α) $-8(2-3+4-5) = -8(+2)-8(-3)-8(+4)-8(-5)$
$= -16+24-32+40=-48+64=+16$

(Θά μποροῦσε νά γίνει πρῶτα ἡ πρόσθεση μέσα στήν παρένθεση, δηλ. +2–3+4–5=–2, καί μετά ὁ πολ/μός –8(–2)=+16. Ἔτσι ὅμως ἀχρηστεύουμε τήν **ἐπιμεριστική** ἰδιότητα τοῦ πολ/μοῦ. Οἱ ἀσκήσεις πού δίνουμε πρέπει νά λύνονται μέ τή βοήθεια τῆς θεωρίας πού προηγεῖται.)

β) $-(+2-3+4-5) = -1(+2-3+4-5)$
$= -1(+2)-1(-3)-1(+4)-1(-5)$
$= -2+3-4+5 = +2$

γ) $+(+\frac{8}{12} - \frac{6}{12}) - (-\frac{5}{12}+\frac{7}{12}) =$
$= +1(+\frac{8}{12} - \frac{6}{12}) - 1(-\frac{5}{12}+\frac{7}{12}) =$
$= +\frac{8}{12} - \frac{6}{12}+\frac{5}{12} - \frac{7}{12} =$
$= \frac{13}{12} - \frac{13}{12} = 0$

δ) $-6(+3)-5(-4)+4(-3)=-18+20-12=$
$=-30+20=-10$

[Οἱ ἐμπρός παράγοντες καθενός ἀπ᾽ τά τρία γίνομενα, δηλ. οἱ παράγοντες –6, –5, +4, **δέν πρέπει** νά μποῦν σέ παρένθεση γιά νά φανεῖ ὅτι ἔχουμε **ἕνα ἄθροισμα** τριῶν γινομένων. Ἄν βάλουμε κι αὐτούς τούς παράγοντες μέσα σέ παρένθεση, τότε ἡ παράσταση γίνεται: (–6)(+3)(–5)(–4)(+4)(–3). Ἔτσι ὅμως ἄλλαξε ἐντελῶς ἡ σημασία της καί παρουσιάζεται σάν ἕνα γινόμενο μέ ἕξι παράγοντες.]

E_7: «Γιά νά πολ/σουμε ἀριθμό ἐπί γινόμενο τριῶν παραγόντων, πολ/ζουμε τόν ἀριθμό **ἐπί μόνο ἕνα παράγοντα** (ὁποιον θέλουμε), ἐνῶ οἱ ἄλλοι μένουν ἀμετάβλητοι». Δηλαδή θά δείξουμε ὅτι:

$$(-2)[(-5)(+6)(-7)] = [(-2)(-5)](+6)(-7) \qquad (1)$$

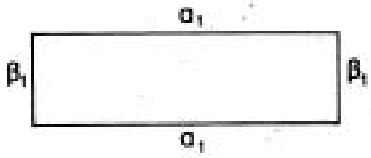
Γνωρίζουμε ὅτι:

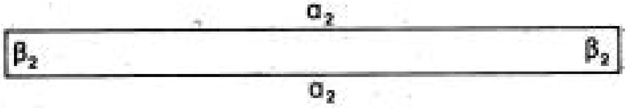
Συνέχεια στήν ἑπόμενη →

ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ

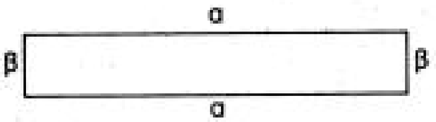
(Χ.Σ. – Π.Μ.)

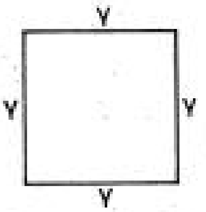
ΛΥΣΕΙΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΤΕΥΧΗ



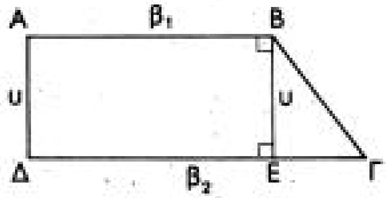


B_{38} $2\alpha_1 + 2\beta_1 = \Pi_1 \Leftrightarrow 2.20+2\beta_1=52 \Leftrightarrow 2\beta_1=52 \Leftrightarrow 2\beta_1=52-40$ $\Leftrightarrow 2\beta_1=12 \Leftrightarrow \beta_1=6$ cm.
$E_1=\alpha_1\beta_1 \Leftrightarrow E_1=20\cdot 6 \Leftrightarrow E_1=120$ cm².
Ἐπειδὴ τὰ δύο ὀρθογώνια παρ/μα εἶναι ἰσοδύναμα $\Leftrightarrow$ $E_1=E_2 \Leftrightarrow E_2=120 \text{ cm}^2 \Leftrightarrow \alpha_2\cdot\beta_2=120 \Leftrightarrow 40\cdot\beta_2=120 \Leftrightarrow \beta_2=3$cm.





B_{41} $2\alpha+2\beta=\Pi_1 \Leftrightarrow 2\cdot 25+2\beta=58 \Leftrightarrow 2\beta=58-50 \Leftrightarrow \beta=4$ cm. Ἂν μὲ E_1 συμβολίσουμε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου παρ/μου καὶ μὲ E_2 τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τότε:
$E_1=\alpha\cdot\beta \Leftrightarrow E_1=25\cdot 4 \Leftrightarrow E_1=100$ cm².
Ἀλλὰ $E_1=E_2 \Leftrightarrow E_2=100 \Leftrightarrow$
$\gamma^2=100 \Leftrightarrow \gamma=10$ cm.
Τελικὰ λοιπόν: $\Pi_2=4\cdot\gamma \Leftrightarrow \Pi_2=4\cdot 10 \Leftrightarrow \Pi_2=40$ cm.



B_{46} Ὁ τύπος ποὺ μᾶς δίνει τὸ ἐμβαδὸν τραπεζίου εἶναι

$$E = \frac{(\beta_1+\beta_2)\cdot\upsilon}{2}$$

Παρατηροῦμε λοιπὸν ὅτι μόλις μπορέσουμε νὰ βροῦμε τὸ ὕψος αὐτόματα θὰ εἴμαστε σὲ θέση νὰ ὑπολογίσουμε καὶ τὸ ἐμβαδόν.

Φέρνουμε τὴν $BE \perp \Delta\Gamma$ καὶ διαπιστώνουμε ὅτι τὸ τετράπλευρο ΑΒΕΔ εἶναι ὀρθογώνιο παρ/μο (γιατί;) $\Rightarrow \Delta E=AB$ $\Rightarrow \Delta E=8$ cm. $E\Gamma=\Delta\Gamma-\Delta E \Leftrightarrow E\Gamma=11-8 \Leftrightarrow E\Gamma=3$ cm.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιο τρίγωνο $B\hat{E}\Gamma$ ὑπολογίζουμε τὴν ΒΕ: $BE^2+E\Gamma^2=B\Gamma^2 \Leftrightarrow BE^2+3^2=5^2 \Leftrightarrow BE^2=25-9 \Leftrightarrow BE^2=16 \Leftrightarrow$ $BE=4$ cm. Ἀλλὰ $BE=A\Delta=\upsilon \Rightarrow \upsilon=4$ cm.

Συνεπῶς $E = \dfrac{(8+11)\cdot 4}{2} \Leftrightarrow E = \dfrac{19\cdot 4}{2} \Leftrightarrow E = \dfrac{76}{2} \Leftrightarrow E = 38$ cm².

B_{48} **α.** Γιὰ τὸ τετράγωνο ἔχουμε $E=\alpha^2 \Rightarrow \alpha^2=144 \Rightarrow \alpha=12$ cm. Ἑπομένως μποροῦμε νὰ κατασκευάσουμε μόνο ἕνα τετράγωνο ἐμβαδοῦ 144 cm².

β. Ἂν μὲ α, β συμβολίσουμε τὶς πλευρὲς τοῦ ὀρθογωνίου παρ/μου, τότε $\alpha\cdot\beta=144$. Ἀναλύουμε τὸν ἀριθμὸ 144:

$$\begin{array}{r|l} 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \Rightarrow 144 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

← συνέχεια ἀπὸ τὴν προηγούμενη

$(-5)(+6)(-7)=(-5)(-42)$ (2)
(προσεταιριστικὴ ἰδιότητα)

Πολ/ζουμε καὶ τὰ δύο μέλη ἐπὶ –2:

$(-2)[(-5)(+6)(-7)]=(-2)[(-5)(-42)]$
$=[(-2)(-5)](-42)$

Ὥστε $(-2)[(-5)(+6)(-7)]=[(-2)(-5)](+6)(-7)$ (3)

Ἐφαρμόζοντας λοιπὸν τὴν προσεταιριστικὴ ἰδιότητα φτάσαμε στὴν ἰσότητα (3), ποὺ εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἴδια μὲ τὴν ἰσότητα (1), δηλαδὴ σ᾽ αὐτὴν ποὺ θέλαμε νὰ δείξουμε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΠΡΟΤΕΙΝΟΥΜΕ

A_{29} Πῶς θὰ γίνουν οἱ πιὸ κάτω πολ/μοί; (ἀρχίζοντας ἀπὸ ἔξω πρὸς τὰ μέσα τῶν παρενθέσεων)

α) $(-4)[-2+3(-5)-4(+6)] =$
β) $-125+9(-8+7-6+5) =$
γ) $(-6)[+(2-3)-(4-5)] =$

A_{30} Εἶναι σωστὴ ἡ ἰσότητα;
$(-2)\cdot 0-2+4-6 = -2\cdot(0+1-2+3)$

A_{31} Ἔγιναν σωστὰ οἱ πράξεις;
$(-5)(+6)[-7+8] = +5(+6)(+7)-5(+6)(+8)$

A_{32} Εἶναι σωστὴ ἡ ἰσότητα;
$(-3)(-5)(-7) = -(+3)(+5)(+7)$